Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20131218, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)
$$\int_0^4 \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{(x/4)^2+1}\,dx = \frac{4}{16}\left[\arctan(x/4)\right]_0^4 = \frac{\pi}{16}$$

(b)
$$\int_0^3 \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right]_0^3 = \ln 2\,.$$

(c)
$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{-x/2}\,dx &= \{\text{PI}\} = (2x+1)\cdot(-2)e^{-x/2} + 2\int 2e^{-x/2}dx = \\ &= (-4x-2-8)e^{-x/2} + C = C - (4x+10)e^{-x/2}\,.\end{aligned}$$

8p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)
$$y' = 2x\,(y^2+1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+1} = 2x\,dx \Leftrightarrow \arctan y = x^2 + C$$

$\Longrightarrow y = \tan(x^2+C),\quad y(0)=0$ ger att $0 = \tan(\pi + C)$ så att $C = 0$, exempelvis.

$y = \tan(x^2)\,.$

(b)
$$4y''(t) + y(t) = 2e^{t/2}$$

$y_h = A\cos(t/2) + B\sin(t/2)$

$y_p = CE^{t/2}$ insatt i DE:n ger $Ce^{t/2}(4/4+1)) = 2e^{t/2} \Leftrightarrow C = 1$ .Svar $y = A\cos(t/2) + B\sin(t/2) + e^{t/2}$.

(c)
$$ty'(t) - 2y(t) = 2t^3\,\cos t \Leftrightarrow y' - \frac{2}{t}\,y = 2t^2\cos t,\ \text{IF} = e^{2-\ln t} = t^{-2} \Rightarrow$$

$$\left(y\cdot t^{-2}\right) = 2\cos t \Leftrightarrow y\cdot t^{-2} = 2(\sin t + C) \Leftrightarrow y = 2t^2(\sin t + C)\,.$$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi^2(\cdot 0 + C) \Leftrightarrow C = 0$. Svar: $y = 2t^2\sin t,$.

3. Givet funktionen $h(x) := \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(x^2+1\right)$.

(a)
$$h(x) = \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(x^2+1\right) = (1+2x+2x^2-1...)(x^2-x^4/2+...) = 2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3} = 2\,.$$

6p

4. (a) $0 \le \dfrac{1}{k^2+4k+3} \le \dfrac{1}{k^2}$ och alltså är serien konvergent. Enligt uppgift 1(b) är $\dfrac{1}{k^2+4k+3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3}\right)$, så att en partialsumma är

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}\,,\ \text{då } n\to\infty\,.$$

(b) Sätt $a_k = \dfrac{k+1}{k^{3/2}}$ och $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Då är $a_k \ge b_k > 0$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$ divergent. Svar (b). Serien är divergent.

5p

5. (a) Beräkna volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring $y-$axeln...

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi\,.$$

(b) Kurvan $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, där $0 \le x \le \sqrt{2}$, roterar kring $y-$axeln och genererar en yta. Ytans area är

$$A = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}\ \left(1+x^2\right)_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)\,.$$

6p

6. (a) Ge en formel för partiell integration av produkten $f(x)\cdot g(x)$...Ex.vis för obestämd integral:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

(b) Lämpliga villkor på $f(x)$ är att $f(x)$ är kontinuerlig och på $g(x)$ är att $g'(x)$ är kontinuerlig. 5p

7. Beräkna integralen...

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \left\{ \begin{array}{ll} 1+e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t-1) & \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t-1} \\ x - \text{gränser} & 0, \quad \infty \\ t - \text{gränser} & 2, \quad \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_2^\infty \frac{dt}{t(t-1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{2}\int_2^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{b-1}{b}\right) - \ln\left(\frac{2-1}{2}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty}\left[\ln(1-1/b) + \ln 2\right]\right) = \ln 2\,.$$

5p

8. Givet serien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(2x)^{k-1}$ ...

(a)

$$\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \frac{k\,2^{k-1}}{(k+1)2^k} = \frac{1}{1+1/k}\,\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} =: R \text{ då } k\to\infty\,.$$

Alltså abolutkonvergent för $x:\ |x| < 1/2$ och divergent för $|x| > 1/2$. För $x = \pm 1/2$ får vi termer $k\,(\pm 1)^{k-1} \not\to 0$. Alltså divergent.

(b) Seriens summa: En primitiv funktion till $f(x)$ är

$$F(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

så att

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}\,.$$

7p