

Lösningförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20140425, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = 0$$

ty udda integrand och symmetriskt integrationsintervall.

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (x-2)e^{-x/2} \, dx &= \{\text{P.I.}\} = \left[-2(x-2)e^{-x/2}\right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty e^{-x/2} \, dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-2xe^{-x/2}\right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-2xe^{-b/2} + 0\right] = 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$xy' + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C + \ln x}$$

Villkoret $y(1) = 2$ ger $2 = \frac{1}{C+0} \Rightarrow C = 1/2$, så att

$$y = \frac{2}{1 + 2 \ln x}.$$

(b)

$$y''(t) - 4y(t) = 8t^2 \quad \begin{cases} y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ y_p = At^2 + Bt + C \end{cases} \quad y_p'' - 4y_p = 2A - 4(At^2 + Bt + C) = 8t^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 2A - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 2t^2 - 1.$$

(c) $y'(t) + 2y(t) = 3e^{-2t}$, $y(1) = 0$. I.F. är e^{2t} . Multiplikation av DE:n med denna ger

$$(e^{2t} y)' = 3 \Leftrightarrow e^{2t} y = 3t + C \Leftrightarrow y = (3t + C)e^{-2t}.$$

Med $y(1) = 0$ ger detta $(3 + C) = 0$, så att $y = (3t - 3)e^{-2t}$.

9p

3. Givet funktionen $h(x) := \sin 2x \ln(4x^2 + 1)$.

(a) Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3, ges av

$$h(x) = \sin 2x \ln(4x^2 + 1) = (2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots) \cdot (4x^2 - \frac{(4x^2)^2}{2!} + \dots) = 8x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

(b) Gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (8 + \mathcal{O}(x)) = 8$$

6p

4. (a) Beräkna summan av serien $\sum_0^\infty \frac{18}{k^2 + k - 2} \dots$

$$18 \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2 + k - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$= 6 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot \frac{11}{6} = 11.$$

(b) Summan av serien

$$\sum_{j=1}^\infty (-1)^j (-2/3)^j = \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{2}{3} \right)^j = \frac{2}{3} \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{2}{3} \right)^j = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 2.$$

(c) Visa att $\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \dots$ En lämplig integraluppskattning är $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx$

där

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} \text{ är en översumma och } \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} \text{ är en undersumma.}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx < \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2}, \text{ och } \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} < 1 + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx$$

eller

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, dx < 1 + \frac{\pi}{2}.$$

8p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, t + \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

(a) Beräkna längden av kurvan...

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2 \cos t + 1} = \sqrt{2(1 + \cos t)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos(t/2).$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (1 + \cos t)^2} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(t/2) dt = 2 \cdot 2 [\sin(t/2)]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ l.e.}$$

(b) Beräkna områdets area A ...

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b y dx = \int_{t=\pi/2}^0 (t + \sin t)(-\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} (t \sin t + \frac{1 - \cos 2t}{2}) dt = \\ &= [t(-\cos t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{4} \text{ a.e.} \end{aligned}$$

6p

6. (a) I integralen $\int f(x) dx$ görs variabelsubstitutionen $x = x(t)$, som ger

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

(b) Lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ i (a) är att $f(x)$ kontinuerlig och $x'(t)$ är kontinuerlig.

5p

7. Beräkna integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$...

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} dx &= \{(x+1)\sqrt{x^2-1} = (x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}\} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}} = \\ \{(x-1)^{1/2} = t, x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt\} &= \int_0^{\infty} \frac{2t dt}{(t^2+2)^{3/2}t} = \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{(t^2+2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Vi börja med att beräkna

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \frac{dt}{(t^2+2)} &= \{\text{P.I.}\} = t \cdot \frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + \int t \cdot \frac{t}{(t^2+2)^{3/2}} = \\ &= t \cdot \frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + \int \frac{t^2+2}{(t^2+2)^{3/2}} - \int \frac{2t}{(t^2+2)^{3/2}} \Leftrightarrow t \cdot \frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + C = \int \frac{2dt}{(t^2+2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Alltså är, med $t = \sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}} = \left[\frac{t}{(t^2+2)^{1/2}} \right]_{x=1}^{\infty} = \left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \right]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1-1/b}}{\sqrt{1+1/b}} - \frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}} \right) = 1.$$

7p