

## Tentamen i matematik TMV 138, 20150114, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	0703-088304, 0708-948 456
Examinator:	Reimond Emanuelsson, 0708-948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p. Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2014, LP2

1. Beräkna följande integraler

(a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} (2x - 1)e^{-2x} \, dx,$  (c)  $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2 + 3x} \, dx.$

9p

2. Lös differentialekvationerna

(a)  $x^2 y'(x) + y(x)^2 = 0, y(1) = -1,$

(b)  $y''(t) - 4y(t) = 4e^{2t},$

(c)  $ty'(t) + y(t) = 4t \ln t, y(1) = -1.$

9p

3. Givet funktionen  $h(x) := \ln(x^2 + 1) \cdot (\arctan x)^2.$

(a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av  $h(x)$  av ordning 6, med  $h(x) = p_6(x) + R_6(x)$ , där  $p_6(x)$  är Maclaurinpolynomet av grad 6 och med resttermen  $R_6(x)$  på Ordoform.

(b) Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - h(x)}{x^6}.$

6p

4. (a) Avgör om serien  $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k$  är konvergent eller divergent.

(b) Visa att  $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$  med lämplig integraluppskattning.

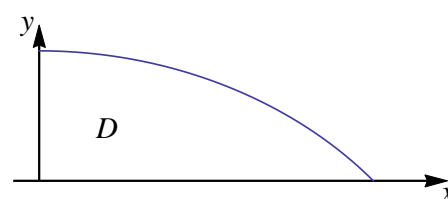
(c) Beräkna summan av serien  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{j(j+3)}.$

8p

5. Givet kurvan  $(x(t), y(t)) = (t + \sin t, \cos t), 0 \leq t \leq \pi/2.$

(a) Beräkna längden av kurvan.

(b) Kurvan, tillsammans med linjerna  $x = 0$  och  $y = 0$  begränsar ett område  $D$  i första kvadranten, se figur. Beräkna områdets area.



Figur till uppgiften

6p

6. (a) Ge en formel för variabelsubstitution av  $\int f(x)dx$ , där variabelsubstitutionen är  $x = x(t)$ . (Hur ser integralen ut då den är en integral i variabeln  $t$ ? Skriv variabelsubstitutionen som en likhet.)

(b) Ge lämpliga villkor på funktionerna  $f(x)$  och  $x(t)$  i (a).

5p

7. Betrakta integralen  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$

(a) På vilket/vilka sätt är integralen generaliserad?

(b) Beräkna integralen.

7p

## Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

## En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

## Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är  $\xi$  ett tal mellan 0 och  $x$ .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$