Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20150114, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = 0$$
eftersom integranden udda funktion och integrationsintervallet symmetriskt.

(b)
$$\begin{aligned}\int_0^b (2x-1)e^{-2x}\,dx &= \{\text{P.I.}\} = \left[(2x-1)(-1/2)e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx\right]_0^b = \\ &= \left[-x\,e^{-2x}\right]_0^b = 0 - b\,e^{-2b} \to 0 \text{ då } b \to \infty\end{aligned}$$

(c)
$$\int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \left\{ \frac{6}{x^2+3x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} \right\} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)\right]_1^b =$$
$$\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{1+3/b}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+3}\right)\right] = \ln 4\,.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)
$$x^2y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow -\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = C - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{x}{C\,x-1}$$
Villkoret , $y(1) = -1$, ger att
$$-1 = \frac{1}{C-1} \Leftrightarrow C = 0 \text{ så att } y = -x\,.$$

(b) $y''(t) - 4y(t) = 4e^{2t}$ har karakt. ekv. $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2$, så att $y_h = Ae^{2t} + Be^{-2t}$. Eftersom HL ingår i y_h, sätt $y = u(t)e^{2t}$. Då är
$$y' = (u' + 2u)e^{2t} \text{ och } y'' = (u'' + 4u' + 4u)e^{2t}.$$
DE:n blir därmed
$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (u''+4u'+4u)e^{2t} - 4u\,e^{2t} = (u''+4u')e^{2t} = 4e^{2t} \Leftrightarrow u''+4u' = 4 \\ &\Leftrightarrow u' + 4u = 4t + C_1 \Leftrightarrow (e^{4t}u)' = (4t+C_1)e^{4t} \\ &\Leftrightarrow e^{4t}u = e^{4t}(t+C_2) + C_3 \Leftrightarrow u = (t+C_2) + C_3e^{-4t} \Leftrightarrow y = (t+C_2)e^{2t} + C_3e^{-2t} \text{ (Svar)}\end{aligned}$$

(c)
$$t\,y'(t) + y(t) = (t\,y(t))' = 4t\ln t \Leftrightarrow$$
$$t\,y = 4\int t\ln t\,dt = 2t^2\,\ln t - 2\int t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt = 2t^2\ln t - t^2 + C \Leftrightarrow y = 2t\ln t - t + \frac{C}{t}\,.$$
$$y(1) = -1 \Longrightarrow 2\cdot 0 - 1 + \tfrac{C}{1} = -1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ så att } y = 2t\ln t - t\,.$$

9p

3. Givet funktionen $h(x) := \ln\left(x^2+1\right)\cdot(\arctan x)^2$.

(a) och (b) Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 6:
$$\begin{aligned}\ln(x^2+1) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6) \\ (\arctan x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 = x^2 - 2\cdot\frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{9} + \mathcal{O}(x^6) = x^2 - 2\cdot\frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6) \\ h(x) &= x^4 + x^6\left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \mathcal{O}(x^8) \Rightarrow \frac{x^4 - h(x)}{x^6} = \frac{7}{6} + \mathcal{O}(x^2) \longrightarrow \frac{7}{6} \text{ då } x \to 0\,.\end{aligned}$$

6p

4. (a) Serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^k$ är konvergent eftersom $0 \le a_k := \left(\frac{2}{k}\right)^k \le \left(\frac{2}{3}\right)^k =: b_k$ för $k = 3, 4, \ldots$

och serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är en konvergent geometrisk serie, eftersom $|2/3| < 1$.

(b) (Visa att $1 \le \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le 2$ med lämplig integraluppskattning.)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \ge \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \text{ eftersom summan är en översumma.}$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \ge \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \text{ eftersom summan är en undersumma.}$$
Alltså får vi
$$1 \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le 1 + 1 = 2 \text{ v.s.v.}$$

(c) Summan av serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{j(j+3)}$ kräver samma PBU, som 1 (c):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+3}\right) &= \frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots \\
&+ \frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}= \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} \longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}
\end{aligned}$$

då $n \longrightarrow \infty$. 8p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (t+\sin t, \cos t),\ 0 \le t \le \pi/2$.

(a) Längden av kurva är

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1+\cos t)^2+(-\sin t)^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2+2\cos t}\, dt = \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t/2)}dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos(t/2)\, dt = 4[\sin(t/2)]_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

(b) Områdets area är

$$A = \int_{t=0}^{\pi/2} y\, dx = \int_0^{\pi/2} y(t)x'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t(1+\cos t)dt = \left[\sin t + \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = 1+\frac{\pi}{4}\,.$$

6p

6. (a) V.S. innebär att $\int f(x)dx = \int f(x(t))\, x'(t)\, dt$ med variabelsubstitutionen $x = x(t)$.

(b) Lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ är att $f(x)$ och $x'(t)$ kontinuerliga. 5p

7. Betrakta integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx$...

(a) Integralen är generaliserad eftersom I) integranden är obegränsad i $x = 1$ och II) obegränsat integrationsintervall.

(b) Beräkna integralen...

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx = \left\{\begin{array}{ll} \text{V.S.} & t=\sqrt{x^2-1},\ x=\sqrt{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ x-\text{gränser} & 1 \le x < \infty \\ t-\text{gränser} & 0 \le t < \infty \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)t}\, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt\,.$$

Vi bröjar med en liknande integral och integrerar partiellt

$$\begin{aligned}
h(t) &:= \int 1\cdot \frac{1}{(t^2+1)^{1/2}}\, dt = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \int t\cdot(-1/2)\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^{3/2}} dt = \\
&= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \underbrace{\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{3/2}} dt}_{=h(t)} - \int \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + C \Rightarrow \int_0^b \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt = \left[\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right]_0^b = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+1/b^2}} \to 1 \text{ då } b \to \infty\,.
\end{aligned}$$

7p