

Tentamen i matematik TMV 138/TMV 181, 20150413, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	0703-088304, 0708-948 456
Examinator:	Reimond Emanuelsson, 0708-948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p. Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39 p, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2014, LP2

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \sin x \, dx,$

(b) $\int_0^\infty (3x - 1)e^{-3x} \, dx,$ (c) $\int_0^e \ln x \, dx.$

9p

2. Lös differentialekvationerna

(a) $x y'(x) + y(x)^2 = 0, y(1) = -1,$

(b) $t y'(t) + y(t) = 2 \ln t, y(1) = -2,$

(c) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}.$

9p

3. (a) Ange Maclaurinpolynomet för $h(x) = \ln(x^2 + 1) \cos x$ av grad 6.

(b) Givet Maclaurinserien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}.$ Mot vilken funktion konvergerar serien? Beräkna också $f(1).$

(c) Beräkna summan av den geometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k.$

9p

4. Givet ytan som begränsas av $y = \sqrt{1-x^2}$ och x -axeln, där $0 \leq x \leq 1.$ Beräkna volymen av den kropp som bildas då ytan roterar kring

(a) x -axeln.

(b) y -axeln.

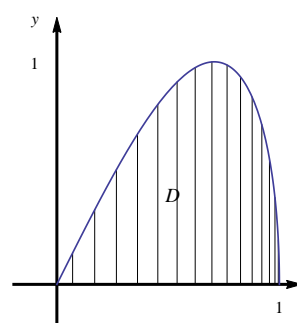
(c) Beskriv rotationskropparna i (a) och (b) i ord.

7p

5.

Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$ i första kvadrant, se figur.

Beräkna arean av den yta D som kurvan tillsammans med x -axeln begränsar.



Figur till uppgiften

4p

6. För vilka reella tal α är integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ konvergent respektive divergent? Ge bevis!

5p

7. Betrakta integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^\alpha + 1}} \, dx.$

(a) För vilka reella tal α är integralen konvergent?

(b) Beräkna integralen.

7p

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$