Lösningsförslag till tentamen i matematik TMV 138, 20150413, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

   (a) $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sin x \, dx = 0$ eftersom integranden är produkten av en jämn funktion x^2 och en udda funktion $\sin x$ upphöjt till en udda exponent 3 och således en udda integrand. Dessutom är integrationsintervallet symmetriskt.

   (b)
$$\int_0^\infty (3x-1)e^{-3x}\,dx = \{\text{P.I.}\} = \left[(3x-1)\cdot(-1/3)e^{-3x}\right]_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty 3e^{-3x}dx =$$
$$\left[()e^{-3x}\right]$$

   (c)
$$\int_0^e \ln x\,dx = \{\text{var. subst. } \ln x = t,\ x = e^t,\ dx = e^t dt\} = \int_{-\infty}^{1} t\,e^t\,dt = \left[(t-1)e^t\right]_{-\infty}^{1} = 0\,.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$x\,y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y^2} \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C+\ln x}\,.$$
   Randvillkoret $y(1) = -1$ ger
$$-1 = \frac{1}{C+\ln 1} = \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -1 \text{ så att } y = \frac{1}{\ln x - 1}\,.$$

   (b)
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}\,.$$
   y_h : Karakt. ekv $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 2 \end{cases}$, så att $y_h = C_1 e^t + C_2\,e^{2t}$.

   y_p : Vi ser att HL ingrå som term i y_h, så att vi ansätter $y_p = y = A\,t\,e^{2t}$, som ger
$$y'' - 3y' + 2y = ((4A + 4At) - 3(A + 2At) + 2At)e^{2t} = Ae^{2t} = \underbrace{e^{2t}}_{\text{HL}} \Leftrightarrow A = 1\,.$$
   Således är $y_p = t\,e^{2t}$ och $y = (t + C_1)e^t + C_2e^{2t}$.

   (c)
$$t\,y'(t) + y(t) = 2\ln\,t \Leftrightarrow y' + \frac{1}{t}\,y = 2\frac{\ln t}{t} \text{ med IF} = e^{\ln t} = t\,.$$
   DE:n kan ekvivalent skrivas
$$(t\,y)' = \frac{2\ln t}{t} \Leftrightarrow t\,y = (\ln t)^2 + C$$
   Med $y(1) = -2$ får vi $-2 = 0^2 + C$, så att $C = -2$. Svar: $y = (\ln t)^2 - C$.

9p

3. (a) Ange Maclaurinutvecklingen av $h(x) = \ln(x^2+1)\cos x$ av ordning 6... Polynomen av tillräckligt hög grad.
$$\begin{cases} ln(x^2+1) : \; x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} \\ \cos x : \; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \end{cases}$$
   Som ger Maclaurinpolynomet
$$p_6(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + (1/4 + 1/4!)x^6 = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{7}{24}x^6$$

   (b) Givet Maclaurinserien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$. Mot vilken funktion konvergerar serien...
$$f(x) = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x} - 1 \text{ och } f(1) = e^2 - 1\,.$$

   (c) Beräkna summan av serien S...

   Lösning: En geometrisk serie med $|x| = |2/\pi| < 1$ och allstå konvergent.
$$s = -1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^k = -1 + \frac{1}{1 - 2/\pi} = \ldots = \frac{2}{\pi - 2}$$

7p

4. Givet ytan som begränsas av $y = \sqrt{1-x^2}$ och $x-$axeln, där $0 \le x \le 1$. Beräkna volymen av den kropp som bildas då ytan roterar kring

   (a) $x-$axeln:
$$V_x = \int_0^1 \pi(1-x^2)dx = \frac{2\pi}{3}$$

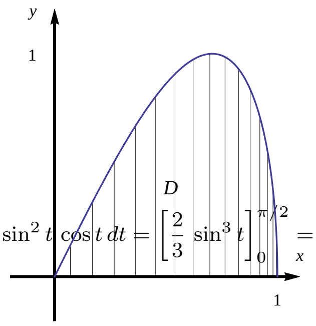
   (b) $y-$axeln:
$$V_y = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}$$

(c) Rotationskropparna i (a) och (b) är båda två halvklot med radie 1. 7p

5.

Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$ i första kvadrant, se figur.
Beräkna arean av den yta D som kurvan tillsammans med $x-$axeln begränsar i första kvadranten...

$$\int_{x=0}^{1} \sin 2t\,(-\sin t)dt = \int_{\pi/2}^{0} \sin 2t\,(-\sin t)dt = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\, dt = \left[\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$



Figur till uppgiften

6p

6. För vilka reella tal α är integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konvergent respektive divergent? Bevis: Antag först att $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}\right)\,.$$

Nu är $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-\alpha} = 0$, om $\alpha > 1$ och $b^{1-\alpha} \to \infty$, om $\alpha < 1$. Slutligen, för $\alpha = 1$ är integralen

$$\int_1^b \frac{1}{x^1}\, dx = \ln b \to \infty, \text{ då } b \to \infty$$

Dett visar att integralen är konvergent omm $\alpha > 1$. 5p

7. Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^\alpha + 1}}\, dx$.

(a) Konvergens: För $\alpha = 0$ är integralen divergent och således för mindre α. För $\alpha > 0$ kan vi uppskatta integranden

$$\frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} \geq \frac{1}{x}\cdot x^{-\alpha/2} = \frac{1}{x^{1+\alpha/2}} \text{ och } 1 + \alpha/2 > 1\,.$$

Integralen är alltså konvergent för $\alpha > 0$

(b) Beräkna integralen...

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^\alpha+1}} dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x^\alpha + 1} = t,\ x = (t^2-1)^{1/\alpha} \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{\alpha}(t^2-1)^{1/\alpha - 1} 2t\, dt \\ x - \text{gränser: } 1 \leq x < \infty \\ t - \text{gränser: } \sqrt{2} \leq t < \infty \end{array}\right\}$$

Integralen blir

$$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{\alpha\,(t^2-1)^{1/\alpha}}\,(t^2-1)^{1/\alpha-1} 2dt =$$

$$\frac{2}{\alpha}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{t^2-1}\, dt = \{\text{PBU}\} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^b = \frac{1}{\alpha}\left[\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{1-1/b}{1+/b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] =$$

$0 + \frac{2}{\alpha}\ln(\sqrt{2}+1)$ (svar)

7p