Lösningsföslag till tentamen i matematik TMV 138/TMV 181, 20150817, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^3 x\,dx = 0$$
   ty $\tan^3 x$ är en udda funktion i det symmetriska intervallet $[-\pi/4, \pi/4]$.

   (b)
$$\int_0^{\infty} (5x-1)e^{-5x}\,dx = \{\text{P.I.}\} = \lim_{b\to\infty} \left[-x\,e^{-5x}\right]_0^b = 0\,.$$

   (c)
$$\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{lll} \ln x = t & \Leftrightarrow & x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \\ 1/e \le x \le e & \Leftrightarrow & -1 \le t \le 1 \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} \frac{t}{e^t}\,e^t dt = 0\,.$$

   9p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$x\,y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y^2} \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C+\ln x}.$$
$$y(1) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{C+\ln 1} \Leftrightarrow C = -1\,.\ \text{Svar: } y = \frac{1}{\ln x - 1}$$

   (b)
$$t\,y' + y = (t\,y)' = 1 \Leftrightarrow t\,y = t + C \Leftrightarrow y = \frac{t+C}{t}.$$
   $y(1) = 1$ ger $C = 0$, så att $y = 1$.

   (c) y_h: Karakt. ekv $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm 2$, så att $y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$.
   y_p: Vi ser att HL ingår i y_h, Sätt $y_p = y = e^{2t}\,u$. Insättning i DE:n
$$y''(t) - 4y(t) = 1e^{2t}\,(u''(t) + 4u'(t)) = 6e^{2t} \Leftrightarrow$$
$$u' + 4u = 3e^{2t} + A \Leftrightarrow u = \frac{A}{4} + Be^{-4t} + \frac{e^{2t}}{2}$$

   9p

3. (a) Ange Maclaurinpolynomet för $h(x) = \ln(x^2+1)\,\tan^2 x$ av grad 4...
$$\begin{cases} \ln(x^2+1) = x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ (\tan x)^2 = (x + \mathcal{O}(x^3))^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^4). \end{cases} \Rightarrow h(x) = x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$
   Alltså är polynomet x^4.

   (b) Beräkna summan av serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k^2+k-2}$...
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{3}{k^2+k-2} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \longrightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{11}{6} \text{ då } n \to \infty$$

   (c) Summan av den geometriska serien
$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 2^k}{e^k} = -\frac{1-(-2/e)^n}{1-(-2/e)} \longrightarrow -\frac{e}{e+2} \text{ då } n \to \infty.$$

   9p

4. Givet ytan som begränsas av $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ och $x-$axeln, där $0 \le x \le 1$. Volymen av den kropp som bildas då ytan roterar kring

   (a) $x-$axeln är
$$V_x = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

   (b) och $y-$axeln är
$$V_y = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\pi\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = 2\pi(\sqrt{2}-1).$$

   6p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$, se figur.
   Arean A_0 av området i första kvadrant:
$$A_0 = \int_{x=0}^{1} y dx = \int_{t=\pi/2}^{0} \sin 2t(-\sin t)dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\cos t\,dt = \frac{2}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$
   Områdets area är alltså $\frac{8}{3}$.

   4p

6. Följande formel för partiell integration är given

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx\,,$$

där $F'(x) = f(x)$.

(a) Lämpliga förutsättningar på de inblandade funktionerna är att f och g' är kontinuerliga samt att $F'(x) = f(x)$. **1p**

(b) Bevis av formeln: Vi deriverar båda led.

$$\text{VL: } \frac{d}{dx}\int f(x)g(x)dx = f(x)g(x).$$

$$\text{HL: } \frac{d}{dx}\left(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\right) = F'(x)g(x)+F(x)g'(x)-F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

5p

7. Betrakta integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$.

(a) Integralen generaliserad eftersom integranden $\to\ \infty$, då $x\ \to\ 0_+$, samt eftersom integrationsintervallet $[0,\infty)$ är obegränsat. **1p**

(b) Beräkna integralen...

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} e^x-1=t^2 \Leftrightarrow x=\ln(t^2+1) \Rightarrow \\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1} \\ 0<x<\infty \Leftrightarrow 0<t<\infty \end{array}\right\} = \int_0^\infty \frac{2t}{t(t^2+1)}dt = 2[\arctan t]_0^\infty = \pi.$$

6p