Lösningsförslag 2016-01-13

1a, $\int \frac{5}{x^2-4x-5}\,dx = \left\{ x^2-4x-5 = (x+1)(x-5) \right\} =$

$\int \frac{5}{(x+1)(x-5)}\,dx = \left\{ \frac{5}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} \overset{H.P.}{\Rightarrow} \begin{matrix} A = -5/6 \\ B = 5/6 \end{matrix} \right\} =$

$= \int -\frac{5/6}{x+1} + \frac{5/6}{x-5}\,dx = 5/6 \ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C.$

b, $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,dx = \{\text{Part. int.}\} = \underbrace{\left[-x^2\cos x\right]_0^\pi}_{=\pi^2} + \int_0^\pi 2x\cos x\,dx =$

$= \pi^2 + 2\int_0^\pi x\cos x\,dx = \{\text{Part. int.}\} = \pi^2 + 2\underbrace{\left[x\sin x\right]_0^\pi}_{=0} - 2\int_0^\pi \sin x\,dx$

$= \pi^2 - 2\left[-\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 2\cdot(1+1) = \pi^2 - 4.$

c, $\int_0^\infty \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \arctan x \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x=0 \rightsquigarrow u=0 \\ x=\infty \rightsquigarrow u=\pi/2 \end{matrix} \right\} =$

$= \int_0^{\pi/2} u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$

$\square$

2a, $y' + e^{x+y} = 0 \Leftrightarrow y' = -e^x \cdot e^y$, dvs. seperabel!

$\Rightarrow \int e^{-y}\,dy = -\int e^x\,dx \Leftrightarrow -e^{-y} = -e^x - C$

$\Leftrightarrow e^{-y} = e^x + C \Leftrightarrow y = -\ln(e^x + C)$

eftersom vi har givet att $y(0) = 0$ så gäller att

$y(0) = -\ln(e^0 + C) = -\ln(1+C) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ och vi får att

$y(x) = -\ln(e^x) = -x$ löser problemet.

b, OBS! Här smög det sig in ett tryckfel. Tanken var att ekv. skulle vara $y'' + 4y' + 4y = 0$ och inte $y'' + 4y' + 4 = 0$. Nedan följer lösningar till båda problemen.

(i) $y'' + 4y' + 4 = 0$ och sätt $w = y'$

$\Rightarrow \quad w' + 4w + 4 = 0 \Leftrightarrow w' + 4w = -4$, dvs. en linjär 1:a ordn. ODE. Integrerande faktor är e^{4x} så

$$\frac{d}{dx}(e^{4x} \cdot w) = 4e^{4x} \cdot w + e^{4x} \cdot w' = e^{4x} \cdot (w' + 4w) = -4e^{4x}$$

$\Rightarrow \; we^{4x} = -e^{4x} + C \Leftrightarrow w = C \cdot e^{-4x} - 1.$

Men $w = y' \Rightarrow y = \int w\,dx = \int Ce^{-4x} - 1\,dx = -\frac{C}{4}e^{-4x} - x + D.$

Vi bestämmer C och D m.h.a. villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1.$

$y(0) = -\frac{C}{4} + D = 0 \Leftrightarrow C = 4D$

$y'(0) = C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow D = 1/2$

och vi får lösningen $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x} - x + \frac{1}{2}.$

(ii) $y'' + 4y' + 4y = 0$. Den karakteristiska ekv. blir här

$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm \sqrt{4 - 4} = -2$, dubbelrot!

Den allmänna lösningen är $y(x) = (A + Bx) \cdot e^{-2x}$ Vi finner A och B m.h.a. villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

$y(0) = A = 0$

$y'(0) = B \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow B = 1$

så lösningen till problemet blir $y(x) = x \cdot e^{-2x}$.

c, $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0$, dvs. en linjär 1:a-ordn. ODE. Den integrerande faktorn är $e^{\int p(x)dx}$ där $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$ så

$$\int p(x)dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad (+C)$$

så $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \cdot y\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2} \cdot y\right) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} \cdot y'$

$= \sqrt{1+x^2} \cdot \left(y' + \frac{xy}{1+x^2}\right) = 0$. Alltså är

$$\sqrt{1+x^2} \cdot y = C \iff y(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad \square$$

3a, Ur formelbladet får vi att

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \end{cases}$$

Sätt först och främst $z = \sin(x)$ s.a. $x = 0 \Rightarrow z = 0$. Då kan vi Maclaurinutv. $\ln(1+z)$ enl.

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sin(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3} - \dots$$

Maclaurinutv. nu $\sin(x)$! Vi kan skriva

$$\ln(1+z) = \ln(1+\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3} + O(\sin^4(x)) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)^3 + \mathcal{O}(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^6)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(x^3 + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) + \mathcal{O}(x^7) + \mathcal{O}(x^9)\right) + \mathcal{O}(x^4) =$$

$= \{$strunta i $\mathcal{O}$-termer med potens $> 4\} =$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

och vi är framme!

<u>Svar:</u> $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

b) Denna uppgift blir enkel m.h.a. svaret i a-uppgiften. Vi får att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x)) - x + \frac{x^2}{2}}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}}}{2x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{12} + \mathcal{O}(x) = \frac{1}{12}.$$

<u>Svar:</u> Gränsvärdet blir $\frac{1}{12}$.

$\square$

4a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3} = \left\{\frac{2}{n^2+4n+3} = \left[n^2+4n+3 = (n+1)(n+3)\right] = \frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+3}\right.$

H.P. $\Rightarrow$ $A = 1$, $B = -1$ $\left.\right\} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3} =$

$$= \left[\left(1-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{4}}-\cancel{\tfrac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{5}}-\cancel{\tfrac{1}{7}}\right)+\dots\right] =$$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ och serien är alltså konvergent!

b) $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} 3^{2\cdot(1/2)^n} = 3^2\cdot 3^1\cdot 3^{1/2}\cdot 3^{1/4}\cdot\ldots = 3^{\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot(1/2)^n} = \{\text{geometrisk serie!}\} =$

$$= 3^{\frac{2}{1-1/2}} = 3^4 = 81.$$

c) Serien är inte absolutkonvergent eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \{p\text{-serie med } p=1\} = \infty.$$

Däremot så gäller det att

(i) $a_n\cdot a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{(-1)^n}{n+1} = -\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} < 0$

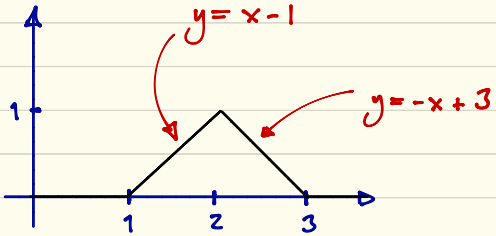
(ii) $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = |a_n|$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.$

och alltså är serien betinget konvergent.

$\square$

5a, Bestäm först och främst de räta linjernas ekvationer!



För rotation runt x-axeln kan vi beräkna volymen som:

$$V_x = 2\cdot\int_1^2 \pi\cdot(x-1)^2\,dx = 2\pi\int_1^2 x^2-2x+1\,dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{3}-4+2-\frac{1}{3}+1-1\right) = 2\pi\left(\frac{7}{3}-2\right) = 2\pi\left(\frac{7-6}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ v.e.}$$

b, För rotationsvolymen runt y-axeln kan man t.ex. använda metoden med cylindriska rör. Man får då att

$$V_y = \int_1^2 (x-1)\cdot 2\pi x\,dx + \int_2^3 (-x+3)\cdot 2\pi x\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^2 x^2-x\,dx + 2\pi\int_2^3 3x-x^2\,dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2\pi\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_2^3 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + 2\pi\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{6}-\frac{12}{2}+\frac{8}{6}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2} + \frac{15}{2} - \frac{19}{6}\right) = 2\pi\left(\frac{14-6+45-19}{6}\right) =$$

$$= \frac{34\pi}{3} \text{ v.e.}$$

$\square$

6, Se boken!

7, $$\int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta\,d\theta \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,du =$$

$$= \left\{ \frac{1}{(1+u)(1-u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \xrightarrow{\text{H.P.}} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{array} \right\} = \int \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| + C = \ln\left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right) + C = \{u = \sin\theta\} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}\right) + C.$$

$\square$