Lösningsförslag 2016-07-04

1a) $\int e^x \cdot \sin x\,dx = \{\text{part. int.}\} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x\,dx =$

$= \{\text{part. int.}\} = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x)\,dx\right) =$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \cdot \sin x\,dx$

$\Rightarrow 2\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) \Leftrightarrow \int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x \cdot \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + C$

Svar: $\int e^x \sin x\,dx = e^x \cdot \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + C.$

1b) $\int \dfrac{1}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,dx = \left\{ \dfrac{1}{(x-1)(x^2+3x+2)} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \right.$

$= \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2} \overset{\text{H.P.}}{\Rightarrow} A = 1/6, B = -1/2, C = 1/3 \Big\} =$

$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$

Svar: $\int \dfrac{1}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$

1c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\arcsin(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \{x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta\,d\theta,\ x=0 \rightsquigarrow \theta = 0,\ x=1 \rightsquigarrow \theta = \pi/2\} =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta = \{\text{trig. ettan}\} = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta =$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Svar:</u> $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}$.

2a, $\frac{y' \cdot y^2}{\sin^2 x} = 1 \Rightarrow$ Separabel!

$$\int y^2 dy = \int \sin^2 x \, dx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C}$$

<u>Svar:</u> $y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C}$.

2b, $y' \cdot \cos x + \frac{y}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$ Linjär!

$$\Leftrightarrow y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Det gäller att $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \ (+C)$ och vi får därmed följande integrerande faktor:

$$\frac{d}{dx}(e^{\tan x} \cdot y) = e^{\tan x}\left(y' + \frac{y}{\cos^2 x}\right) = e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow e^{\tan x} \cdot y = \int e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = e^{\tan x} + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{2\tan x} + C \cdot e^{\tan x}.$$

Svar: $y(x) = e^{2\tan x} + C \cdot e^{\tan x}$.

2c, $y'' + y' - 6y = 0$

Den karakteristiska ekv. blir: $r^2 + r - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Leftrightarrow r_1 = -3,\ r_2 = 2.$

och vi får att $y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

Svar: $y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

3a, Givet att $\phi(1) = 1$, $\phi'(1) = \pi^2$ och $\phi''(1) = \frac{1}{2}$ får vi Taylor-polynomet $P_2(x)$ kring punkten $x = 1$ direkt enl.

$$P_2(x) = \phi(1) + \phi'(1) \cdot (x-1) + \frac{\phi''(1)}{2}(x-1)^2 =$$
$$= 1 + \pi^2 \cdot (x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Eftersom $\phi(x) \approx P_2(x)$ för x-värden nära $x = 1$ så har vi approximationen

$$\phi(1{,}2) \approx P_2(1{,}2) = 1 + \pi^2 \cdot (1{,}2 - 1) + \frac{1}{4}(1{,}2 - 1)^2 =$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 + \frac{\pi^2}{5} + \frac{1}{100} = \frac{101 + 20 \cdot \pi^2}{100}.$$

Svar: $\phi(1{,}2) \approx \frac{101 + 20 \cdot \pi^2}{100}$.

b, Felet $E_2(x)$ vid approx. med $P_2(x)$ definieras som

$$E_2(x) := \Phi(x) - P_2(x)$$

och det gäller att $E_2(x) = \frac{\Phi'''(s)}{3!} \cdot (x-1)^3$, där s är något tal mellan 1 och x. Eftersom vi vet att $0 < \Phi'''(x) < 1$ för alla tal x så gäller att

$$E_2(1{,}2) = \frac{\Phi'''(s)}{3!} \cdot (1{,}2-1)^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{6 \cdot 125} = \frac{1}{750}.$$

Notera att $E_2(1{,}2) > 0$ vilket betyder att approx. $P_2(1{,}2)$ är en underskattning av $\Phi(1{,}2)$ och alltså gäller

$$0 < \Phi(1{,}2) - P_2(x) \leq \frac{1}{750}.$$

<u>Svar:</u> $0 < \Phi(1{,}2) - P_2(1{,}2) \leq \frac{1}{750}$.

4a, Det gäller att $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} \leq \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}(e^0 - e^{-R}) = 1 < \infty$ och konvergensen följer omedelbart.

b, Notera att $\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}(\arctan x)$ och vi enl. formelbladet har att

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Vi får därför att

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad |x|<1.$$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad |x|<1.$

c, Det gäller att:

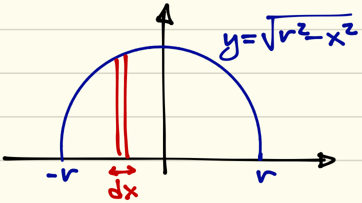
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-2n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n\cdot(n-2)} = \{\text{partielbråk}\} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} =$$

$$= \left(1-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{4}}-\cancel{\tfrac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{5}}-\cancel{\tfrac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{6}}-\cancel{\tfrac{1}{8}}\right)+\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

<u>Svar:</u> $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-2n} = \frac{3}{2}.$

5, En halvcirkel med radie r kan i det övre halvplanet beskrives genom funktionen $y=\sqrt{r^2-x^2}$:



Sfärens volym kan därför beräknas som en rotationsvol. kring x-axeln enl.

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r =$$

$$= 2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right) = 2\pi\cdot\frac{2r^3}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi r^3}{3}}}.$$

6, Se boken eller anteckningar.

7a, $\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{5/2}}$ och därmed har vi av satsen för p-integraler att:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\,dx < \infty$$

och vi är klara!

b, $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \ln x & x=1 \rightsquigarrow u=0 \\ du = \frac{1}{x}dx & \text{"}x=\infty\text{"} \rightsquigarrow \text{"}u=\infty\text{"} \end{array} \right\} =$

$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^{3u}+1}}\,du = \left\{ \begin{array}{l|l} z=\sqrt{e^{3u}+1} & u=0 \rightsquigarrow z=\sqrt{2} \\ dz = \underbrace{\tfrac{3}{2}e^{3u}\cdot(e^{3u}+1)^{-1/2}du}_{=\frac{3}{2}(z^2-1)\cdot\frac{1}{z}du} & \text{"}u=\infty\text{"} \rightsquigarrow \text{"}z=\infty\text{"} \end{array} \right\}$

$= \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{z}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z^2-1}\,dz = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{z^2-1}\,dz = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,dz =$

$= \{H.P.\} = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}\,dz = \frac{1}{3}\Big[\ln|z-1| - \ln|z+1|\Big]_{\sqrt{2}}^\infty =$

$= \frac{1}{3}\Big[\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\Big]_{\sqrt{2}}^\infty = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right) = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1).$

Svar: $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1).$