Tentamen i Analys i en variabel, TMV138, TMV130, TMV181 MATEMATIK

2016 – 08 – 15, kl. 08.30 - 12.30 Chalmers

Hjälpmedel: inga

Telefonvakt: Edvin Wedin

Tel: 5325

Ange den tillfälliga tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. Bonuspoäng från duggor hösten 2015 räknas in.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida.

Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Beräkna följande integraler:

   a. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$, **(3p)**

   b. $\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2} dx$, **(3p)**

   c. $\int \tan^2 x \, dx$. **(3p)**

2. Lös differentialekvationerna:

   a. $xy'(x) + y^2(x) = 0, y(1) = 2$, **(3p)**

   b. $y''(t) - 4y(t) = 8t^2$, **(3p)**

   c. $y'(t) + 2y(t) = 3e^{-2t}, y(1) = 0$. **(3p)**

3. Givet funktionen $h(x) := \sin(2x)\ln(4x^2 + 1)$.

   a. Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3 så att $h(x) = p_3(x) + R_3(x)$, där $p_3(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 3 och $R_3(x)$ är resttermen på Ordoform. **(4p)**

   b. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^3}$. **(2p)**

4.

   a. Beräkna summan av serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{k^2+k-2}$. **(2p)**

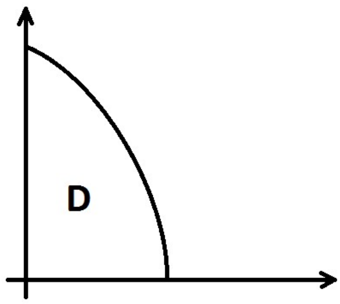
b. Beräkna summan av serien $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(-\frac{2}{3}\right)^j$. **(2p)**

c. Visa att $\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} \leq 1+\frac{\pi}{2}$ med lämplig integraluppskattning. **(4p)**

5. Givet kurvan $\left(x(t), y(t)\right) = (\cos t\,, t+\sin t), 0 \leq t \leq \pi/2$.

a. Beräkna längden av kurvan. **(2p)**

b. Kurvan, tillsammans med linjerna $y = 0$ och $x = 0$ begränsar ett område *D* i första kvadranten, se figur. Beräkna områdets area! **(4p)**



Figur tillhörande uppgift 5.

6.

a. I integralen $\int f(x)\,dx$ görs variabelsubstitutionen $x = x(t)$. Hur ser integralen ut i variabeln t? Skriv variabelsubstitutionen som en likhet. **(4p)**

b. Ge lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ i a-uppgiften. **(1p)**

7. Beräkna integralen $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. **(7p)**

Lycka till!

/Peter

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ är ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$