16/11 -2015

Föreläsning 8

Idag:
- Jämförelsekriteriet (6.5)
- Volymer, rotationsvolymer, kurvlängder ~~och rotationsareor~~. (7.1 - 7.3)

Sats: (Jämförelsekriteriet) Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ och antag att f och g är kont. på (a,b) och att $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^b f(x)\,dx$ det, och

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Vidare, om $\int_a^b f(x)\,dx = \infty$ så är $\int_a^b g(x)\,dx = \infty$.

Bevis: Eftersom både f och g är positiva så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^b g(x)\,dx = \begin{cases} \text{ändligt pos. tal} \\ \text{eller} \\ \infty \end{cases}$$

Om någon av dem (eller båda) divergerar så måste det bero på något av följande:

(i) $|a|$ eller $|b| = \infty$

(ii) f, g singulära i a eller b eftersom de är kont. på (a,b).

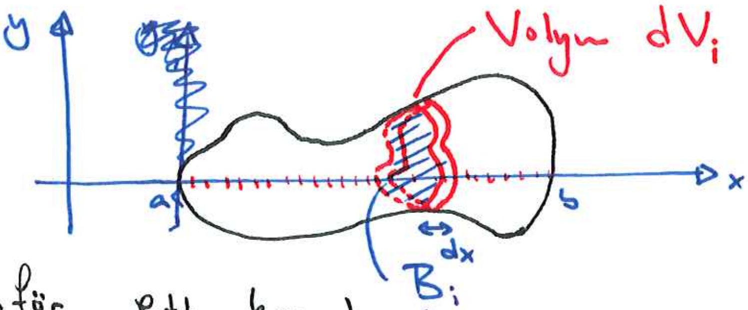
Men då måste gälla ~~att~~, för $a < r < s < b$, att

$$\int_r^s f(x)\,dx \leq \int_r^s g(x)\,dx \quad (= \text{ändligt pos. tal})$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{r\to a^+ \\ s\to b^-}} \int_r^s f(x)\,dx \leq \lim_{\substack{r\to a^+ \\ s\to b^-}} \int_r^s g(x)\,dx \iff \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \quad \square$$

Volymer och rotationsvolymer:

Problem: Vill beräkna volymen av en "allmän" kropp.



Idé: Inför ett koordinatsystem och hacka upp kroppen i små volymselement dV som är enklare att beräkna. Summera därefter ihop alla dessa!

Det gäller att:

$$dV_i = \text{Basytan} \times \text{Bredden}.$$
$$= B_i \cdot dx$$

Klart att basytan B_i ~~varierar~~ ändras beroende på vilken skiva vi väljer att betrakta. Kan därför se B som en funktion av x

$$\rightarrow \quad dV_i = B(x_i) \cdot dx$$

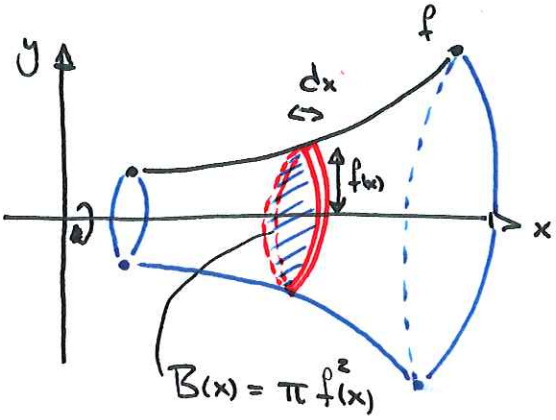
Totalvolymen blir därför

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} dV = \sum_{i=1}^{n} B(x_i)\,dx \longrightarrow \int_a^b B(x)\,dx$$

så

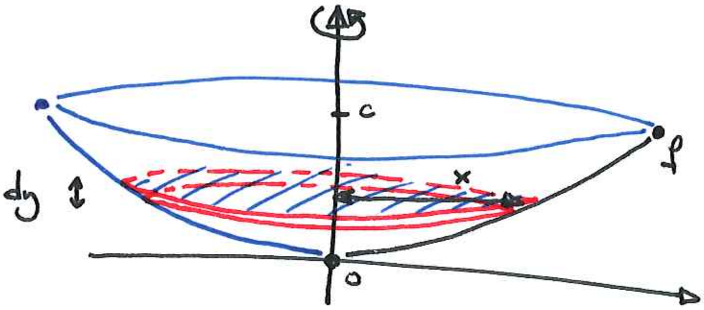
$$\boxed{V = \int_a^b B(x)\,dx}$$

I praktiken dock oftast svårt att bestämma funktionen $B(x)$ ... Men inte om kroppen är rotationssymmetrisk runt x-axeln!



$$\Rightarrow \boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx}$$

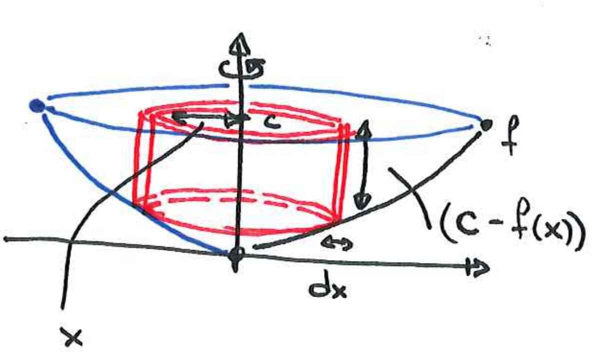
På motsv. sätt kan man göra med kroppar som är rotationssymmetriska runt y-axeln.



$$dV = \pi x^2 dy = \left\{ y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \right\} = \pi\left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \int_0^c \pi\left(f^{-1}(y)\right)^2 dy}$$

Men, man skulle också kunna anv. cylindriska skal!



$$dV = \text{Omkr.} \times \text{Höjd} \times \text{Bredd} =$$
$$= 2\pi x \cdot (c - f(x))\,dx$$

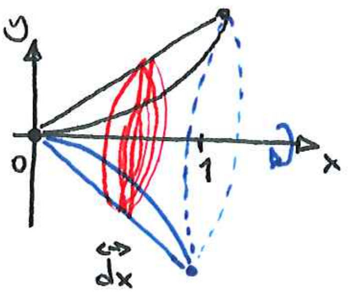
$$\boxed{V = \int_0^c 2\pi x(c - f(x))\,dx}$$

Volymer kan beräknas med "skalmetoder" på många olika sätt. Kräver kreativitet!

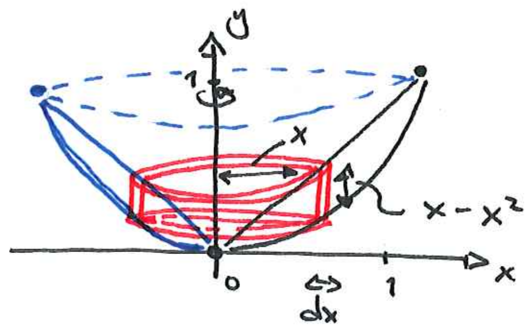
Ex: (7.1.6) Beräkna rotationsvolymen av det område som beg. av $y = x$ och $y = x^2$, både runt x- och y-axeln!

Lösning: Rita!

(i)



(ii)



(i) Använd t.ex. "(ihåliga) brickor": $dV = (\pi \cdot x^2 - \pi \cdot (x^2)^2)\,dx$
$= \pi x^2(1 - x^2)\,dx$

$$\rightarrow V_x = \int_0^1 \pi x^2(1-x^2)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$
$$= \underline{\underline{\frac{2\pi}{15}}} \text{ v.e.}$$

(ii) Använd t.ex. cylindriska skal:

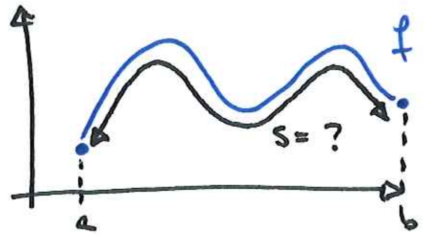
$$dV = 2\pi x \cdot (x - x^2) \cdot dx = 2\pi x^2(1-x)\,dx$$

$$\rightarrow V_y = \int_0^1 2\pi x^2(1-x)\,dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}} \text{ v.e.}$$

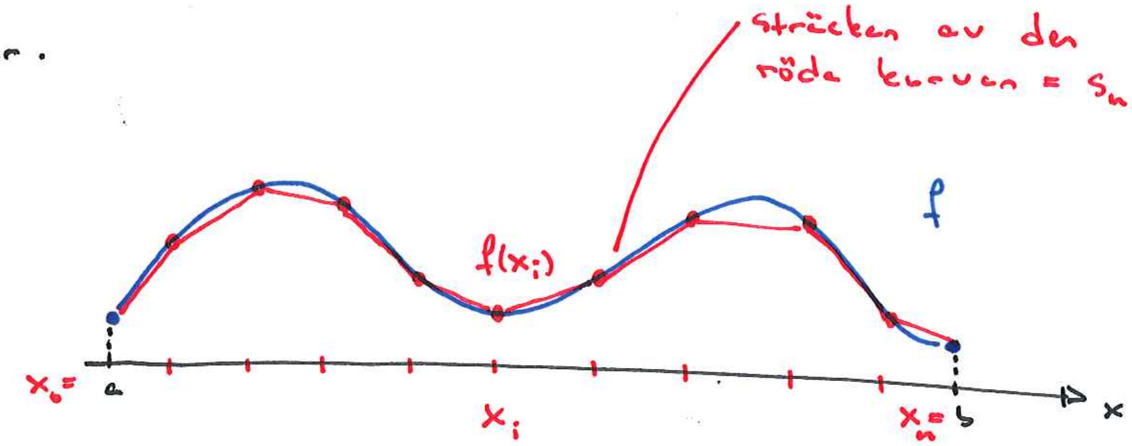
□

Längden av en funktionskurva: (Adams 7.3)

Fråga: Givet en funktion $f(x)$ på $[a,b]$, ~~bum~~ vad är längden av funktionsgrafen?



Kan använda integraler för att lösa detta! Metoden liknar den för rotationsvolymer, nämligen bryt ned problemet i mindre och lättare delar.



Klart att sträckan $s_n \approx s$ om vi bara tar n tillräckligt stort. Mer precist så gäller att:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}}_{= \text{avst. mellan } (x_{i-1}, f(x_{i-1})) \text{ och } (x_i, f(x_i))} =$$

$$= \{ (x_i - x_{i-1}) > 0 \} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \Big(\underbrace{\frac{f(x_{i-1}+\Delta x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}}_{\approx (f'(x_{i-1}))^2}\Big)^2} \cdot \Delta x \longrightarrow \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Vi har alltså härlett formeln för den totala längden av kurvan $y = f(x)$ mellan a och b som

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}$$

Ex: (7.3.12) Beräkna längden av kurvan $y = \ln(\cos x)$ från $x = \pi/6$ till $x = \pi/4$.

Lösning: Använd formeln ovan!

$$y'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$$

$$\Rightarrow \quad s = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + (-\tan x)^2}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x > 0 \text{ på} \\ x \in [\pi/6, \pi/4] \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \{\text{Trig. ettan}\} =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x = \pi/6 \rightarrow u = 1/2 \\ x = \pi/4 \rightarrow u = 1/\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$= \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1 - u^2}\, du = \quad =$$

$= \Big\{$ partialbråk $\quad \dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{(1+u)(1-u)} = \dfrac{A}{1+u} + \dfrac{B}{1-u}$ *

$\Rightarrow \quad A = B = 1/2 \Big\} =$

$$= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\, du = \frac{1}{2}\Big[\ln|u+1| + \ln|u-1|\Big]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2-1}{2}\right) - \ln\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{6} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \quad \square$$