23/11 - 2015

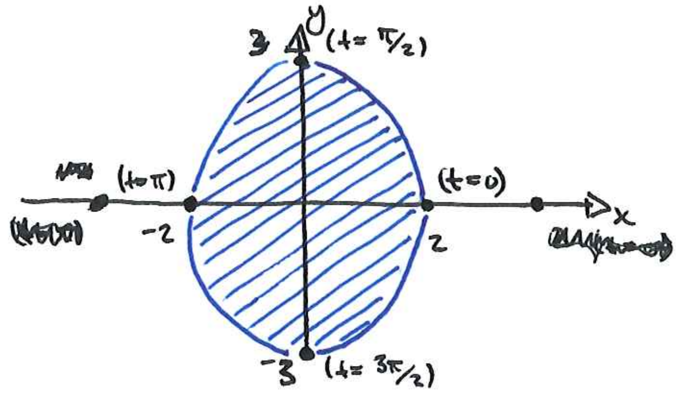
Föreläsning 11

Idag: • Inledning till ordinära differentialekvationer

Men först en areaberäkning!

Ex: (8.4.19) Beräkna arean A som begränsas av kurvan
$x = (2+\sin t)\cos t$, $y = (2+\sin t)\sin t$.

Lösning: Börja med att försöka skissa kurvan!



$$\begin{cases} x = (2+\sin t)\cos t \\ y = (2+\sin t)\sin t \end{cases}$$

~ Amplituder

Kurvan är alltså en form av "oval" med perioden 2π. Vi kan alltså beräkna arean m.h.a. formeln

$$A = -\int_0^{2\pi} g(t)\cdot f'(t)\,dt$$

(kurvan genomlöps moturs!)

där i vårt fall $f(t) = (2+\sin t)\cdot\cos t$ och $g(t) = (2+\sin t)\sin t$.

$$\Rightarrow A = \int_{\cancel{2\pi}\ \pi}^{\cancel{0}\ -\pi} (2+\sin t)\cdot\sin t\cdot(-2\sin t + \cos^2 t - \sin^2 t)\,dt =$$

$$= \int_{\cancel{2\pi}\ \pi}^{\cancel{0}\ -\pi} -4\sin^2 t + \underbrace{\cancel{2\sin t\cos^2 t}}_{\text{udda}} - \underbrace{\cancel{4\sin^3 t}}_{\text{udda}} + \sin^2 t\cos^2 t - \sin^4 t\,dt$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} -4\sin^2 t + \sin^2 t\cos^2 t - \sin^4 t\,dt =$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \sin^2 t\,(-4 + \overbrace{\cos^2 t - \sin^2 t}^{=\cos 2t})\,dt = \int_{\pi}^{-\pi} \overbrace{\sin^2 t}^{=(1-\cos 2t)/2} \cdot (\cos 2t - 4)\,dt$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot (\cos 2t - 4)\,dt = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{5}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\overbrace{\cos^2 2t}^{=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4t + 1}{2}} - 2\,dt =$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{5}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{9}{4}\,dt = \left[\frac{5}{4}\sin 2t - \frac{1}{16}\sin 4t - \frac{9}{4}t\right]_{\pi}^{-\pi}$$

$$= \left(0 - 0 + \frac{9\pi}{4}\right) - \left(0 - 0 - \frac{9\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}} \text{ a.e.}$$

$\square$

Ordinära differentialekvationer:

Differentialekvationer är (förmodligen) det enskilt viktigaste bidraget från matematik till övrig naturvetenskap. Dyker upp och används inom vitt skillda områden, biologi, fysik, ekonomi, politik, hållfasthet, design, ...

Vad är en differentialekvation?

Diff. ekv. = "ekvation som ~~innehåller~~ relaterar en funktion och dess derivator till varandra"

T.ex. (om $y = f(x)$) $\quad y'' + \sin x \cdot y' - e^{y} = 13.$

Målet är att hitta den okända funktionen $y = f(x)$.
En diff. ekvation skiljer sig från en "vanlig" ekv. genom att den obekanta är en hel funktion ist. för ett eller flera tal (t.ex. $x^2 + 2x - 7 = 0$).

I tillämpningar beror funktionen f oftast av **flera** variabler, dvs. $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$ **flera** derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad \text{osv.}$$

Får då s.k. **partiella differentialekvationer** (PDE)

T.ex.

(i) $$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x} + V(x,t) \cdot \Psi, \quad \text{där } \Psi(x,t).$$

Schrödingerekvationen (beskriver kvantmekanik)

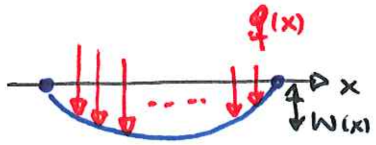
(ii) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad \text{där } V(S,t)$$

Black-Scholes ekvation (beskriver värdeutvecklingen av s.k. europeiska optioner)

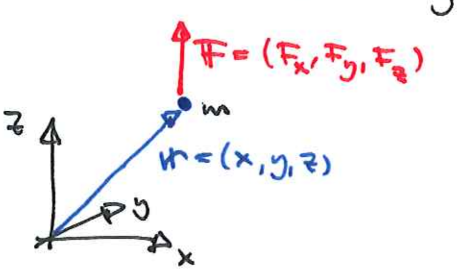
När man begränsar sig till diff.ekv. där funktionen beror av **en** variabel, dvs. $y = f(x)$, kallas dessa för **ordinära differentialekvationer**. (ODE).

Några viktiga exempel är:

(i) $$q(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(E \cdot I \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right),$$ **Balkens ekvation**



(ii) Newtons 2:a lag!



$$F_x(t) = m \cdot a_x(t) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

och motsv. för y och z.

Terminologi och klassificering av ODEer:

En fullt allmän ODE kan alltid skrivas på formen: $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y; x) = f(x)$, dvs.

ett V.L. som beror av den sökta funktionen y och dess derivator upp till given grad n och ett högerled som enbart beror av x.

Talet n (den högsta derivatan) utgör ODE:ns ordning

t.ex. $y'' + \sin(x)\cdot y + e^{y} = x^2$ är en ODE av ordning 2.

Om $f(x) = 0$, dvs. ODE'n är $F(y^{(n)}, \dots, y', y, x) = 0$, säger man att ekvationen är homogen. Om $f(x) \neq 0$ säger man inhomogen.

Vi säger att ODE'n är linjär om det gäller att

$$F((y_1+y_2)^{(n)}, \dots, (y_1+y_2)', (y_1+y_2); x) =$$

$$= F(y_1^{(n)}, \dots, y_1', y_1; x) + F(y_2^{(n)}, \dots, y_2', y_2; x)$$

oavsett y_1 och y_2. Annars säger man att ekv. är icke-linjär.

T.ex.

(i) $x\cdot y'' + \sin x \cdot y' + y = e^x$ är linjär eftersom

$$x\cdot(y_1+y_2)'' + \sin x\,(y_1+y_2)' + (y_1+y_2) =$$

$$= (x\cdot y_1'' + \sin x\cdot y_1' + y_1) + (x\cdot y_2'' + \sin x\cdot y_2' + y_2).$$

(ii) $x \cdot y'' + \sin x \cdot (y')^2 + y = e^x$ är icke-linjär eftersom

$$((y_1+y_2)')^2 = (y_1')^2 + 2y_1'y_2' + (y_2')^2 \neq (y_1')^2 + (y_2')^2.$$

Differentialekv. hänger naturligt ihop med integraler eftersom "integrering eliminerar derivator".
Tydligast: fallet:

$$y' = f(x) \iff y = \int f(x)\,dx$$

dvs. <u>en</u> derivata kräver <u>en</u> integral.
Funkar: princip för högre ordningar också, dvs. <u>två</u> derivator kräver <u>två</u> integreringar osv.

<u>Notera:</u> Varje integrering ger upphov till en integrationskonstant som är obestämd!
En ODE av ordn. $n \geq 1$ kan därför inte ha unik lösning.

För att få unik lösning krävs förutom ODE'n själv ytterligare <u>villkor</u> på funktionen y som man söker. T.ex.

$$\begin{cases} y' + e^x \cdot y = \tan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

← "Tvingar" int.konst. att anta specifikt värde. Kallas <u>begynnelsevillkor</u> eller <u>randvillkor</u>.

En väldigt viktig ODE: $y' = C \cdot y$ $(y' - C \cdot y = 0)$

dvs. derivatan är proportionell mot funktionen.

$\Rightarrow$ Exponentialfunktionen!

Kan skriva alla lösn. som $y(x) = A \cdot e^{Cx}$ för vilka tal A som helst ("integrationskonstant").

Notera att A fixeras om vi vet $y(0)$ (t.ex.).

Följande sats är av yttersta vikt för linjära ODE:

Sats: Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ båda löser den homogena ODE'n $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ så löser även alla funktioner $y = A \cdot y_1(x) + B \cdot y_2(x)$, A, B konst. samma ODE.

Bevis: Lätt! Kolla boken.

Lika enkelt är det att visa följande sats som vi kommer att anv. mycket:

Sats: Om $y = y_1(x)$ löser ODE'n

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{(homogen)}$$

och $y = y_2(x)$ löser ODE'n

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \text{(inhomogen)}$$

så löser $y = y_1(x) + y_2(x)$ också den inhomogena ekvationen.