Föreläsning 12

25/11-2015

Idag:
- Separabla differentialekvationer (kap. 7.9)
- Linjära 1:a-ordn. ODE. (kap. 7.9)

Både separabla- och linjära differentialekv. kan (i princip) lösas för hand utan dator.

Separabla ekv:

En ODE sägs vara <u>separabel</u> om den kan skrivas på formen:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Kan lösas med följande (handviftande) metod:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx}$$

Lös ut y som fnk. av x och man är klar!

Ex: Lös ekvationen $y' = x^2 y^2$.

Lösning:

$$y' = x^2 y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = x^2 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int x^2 dx$$

Här är:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C_1 \quad , \quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C_2$$

så $\quad C_1 - \frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C_2 \iff \frac{1}{y} = C_3 - \frac{x^3}{3} \quad (C_3 = C_1 - C_2)$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{C - x^3}}$$

□

Test: $y' = -\frac{3}{(C-x^3)^2}\cdot(-3x^2) = x^2 \cdot \frac{9}{(C-x^3)^2} = x^2 \cdot y^2$ OK!

Ex: Lös ekvationen $y' = y^2(1-y)$.

Lösning:

$$y' = y^2(1-y) \Rightarrow \frac{1}{y^2(1-y)}\,dy = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2(1-y)}\,dy = \int dx$$

$$\int \frac{1}{y^2(1-y)}\,dy = \left\{ \frac{1}{y^2(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{1-y} = \right.$$

$$= \frac{A y(1-y) + B(1-y) + C y^2}{y^2(1-y)} =$$

$$= \frac{(C-A)y^2 + (A-B)y + B}{y^2(1-y)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} C - A &= 0 \\ A - B &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B = C = 1 \quad \Big\} =$$

$$= \int \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{1-y}\,dy = \ln|y| - \frac{1}{y} - \ln|1-y| + C$$

och därmed har vi ett

$$\ln|y| - \frac{1}{y} - \ln|1-y| = x + C \iff \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| - \frac{1}{y} = x + C.$$

Här ifrån går det inte att komma längre!

<u>Linjära 1:a-ordn. ODE:</u>

En linjär ODE av ordn. 1 är en diff.ekv. på formen: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$, där $p(x)$ och $q(x)$ är två givna funktioner.

Kan lösa sådana diff.ekv. med s.k. <u>integrerande faktor</u>. Metoden är följande:

(i) Beräkna $\int p(x)\,dx$ (en av dem) och kalla denna för $\mu(x)$ (dvs. $\mu'(x) = p(x)$).

(ii) Det gäller nu att

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}\cdot y\right)} = \overbrace{\mu'(x)}^{=p(x)}\cdot e^{\mu(x)}\cdot y + e^{\mu(x)}\cdot y' =$$

$$= e^{\mu(x)}\cdot\underbrace{\left(y' + p(x)\cdot y\right)}_{=q(x)\ \text{(enl. diff.ekv.)}} = \boxed{e^{\mu(x)}\cdot q(x)}$$

så alltså är $\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}\cdot y\right) = e^{\mu(x)}\cdot q(x)$ (*)

(iii) Vi kan enkelt lösa ut y ur (*) genom att integrera!

$$e^{\mu(x)}\cdot y = \int \frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}\cdot y\right)dx = \int e^{\mu(x)}\cdot q(x)\,dx$$

$$\to \boxed{y = e^{-\mu(x)}\cdot\int e^{\mu(x)}\cdot q(x)\,dx = e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx}$$

Man lär sig <u>metoden</u>, inte formeln!

Ex: Lös ekvationen $y' + 2e^x y = e^x$.

Lösning: Diff.ekv. är linjär med $p(x) = 2e^x$ och $q(x) = e^x$. Beräkna integrerande faktorn!

$$\int p(x)\,dx = \int 2e^x\,dx = 2e^x + \cancel{C} \quad \text{(men kan välja } C=0\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{2e^x}\cdot y\right) = 2e^x \cdot e^{2e^x}\cdot y + e^{2e^x}\cdot y' =$$

$$= e^{2e^x}\cdot\left(y' + 2e^x\cdot y\right) = e^{2e^x}\cdot e^x = e^{x+2e^x}$$

så $e^{2e^x}\cdot y = \int e^{x+2e^x}\,dx \Leftrightarrow y = e^{-2e^x}\int e^{x+2e^x}\,dx$

Beräkna integralen!

$$\int e^{x+2e^x}\,dx = \int e^x\cdot\left(e^{e^x}\right)^2 dx = \left\{\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array}\right\} =$$

$$= \int \left(e^u\right)^2 du = \int e^{2u}\,du = \frac{1}{2}e^{2u} + C =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2e^x} + C.$$

Vi får alltså lösningen

$$y = e^{-2e^x}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2e^x} + C\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + C\cdot e^{-2e^x}}}$$

$\square$

Test: $\underline{y' + 2e^x\cdot y} = \cancel{-2Ce^x\cdot e^{-2e^x}} + 2e^x\cdot\left(\frac{1}{2} + \cancel{Ce^{-2e^x}}\right)$

$$= 2e^x\cdot\frac{1}{2} = \underline{e^x} \qquad \text{OK!}$$

Ex: Lös <u>begynnelsevärdesproblemet</u>:

$$\begin{cases} y' + (\cos x)\cdot y = 2xe^{-\sin x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Linjär 1:a-ordn. ODE med $p(x) = \cos x$ och $q(x) = 2xe^{-\sin x}$. Beräkna integrerande faktorn!

$$\int p(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + \cancel{C} \quad (\text{kan välja } C=0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\cdot y\right) = \cos x\cdot e^{\sin x}\cdot y + e^{\sin x}\cdot y' =$$

$$= e^{\sin x}\cdot\left(y' + \cos x\cdot y\right) = e^{\sin x}\cdot 2xe^{-\sin x} =$$

$$= 2xe^{\sin x - \sin x} = 2x$$

Alltså har vi fått att

$$e^{\sin x}\cdot y = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = x^2\cdot e^{-\sin x} + C\cdot e^{-\sin x}$$

Vill nu bestämma konstanten C s.a. $y(\pi) = 0$.

Det gäller att

$$y(\pi) = \pi^2 e^{-\sin(\pi)} + C\cdot e^{-\sin(\pi)} = \pi^2\cdot 1 + C\cdot 1 =$$

$$= \pi^2 + C$$

så alltså måste $\pi^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\pi^2$

och vi får lösningen:

$$y = x^2 e^{-\sin x} - \pi^2 e^{-\sin x} = \underline{\underline{(x^2 - \pi^2)\, e^{-\sin x}}}.$$

$\square$

Ex: Lös integralekvationen $y(x) = 3 + \int_0^x e^{-y(t)}\,dt$ (dvs. hitta $y(x)$!).

Lösning: Börja med att derivera hela ekvationen!

$$\rightarrow \quad y'(x) = \{\text{analysens huvudsats}\} = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-y(t)}\,dt =$$

$$= e^{-y(x)}$$

För att lösa integralekvationen kan vi alltså istället försöka lösa differentialekv:

$$y' - e^{-y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y} \quad (\text{separabel!})$$

$$\rightarrow \quad \int e^{y}\,dy = \int dx \quad \rightarrow \quad e^{y} = x + C$$

$$\rightarrow \quad y = \ln(x + C), \quad x > C.$$

Vilken konstant C ska vi ta? Gå tillbaka till den ursprungliga integralekv.! Då ser vi att

$$y(0) = 3 + \underbrace{\int_0^0 e^{-y(t)}\,dt}_{=0} = 3.$$

Vi måste alltså välja C s.a. $y(0) = 3$.

Men $y(0) = \ln(0 + C) = \ln(C)$ så alltså måste

$$\ln(C) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = e^{3}$$

och vi har hittat den unika lösningen

$$\underline{\underline{y(x) = \ln(x + 3)}}$$

$\square$