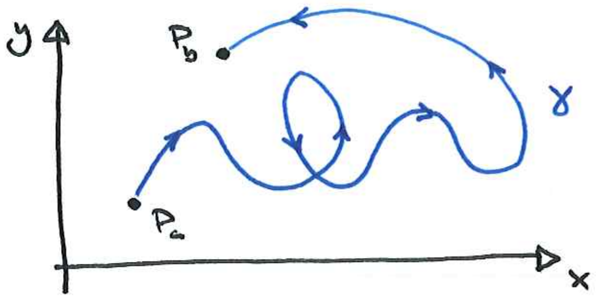
20/11-2015

Föreläsning 10

Idag:
- Kurvor i planet
- Kurvlängder, rotationsareor och "vanliga" areor i samband med kurvor.

Betrakta en (fysikalisk) kurva i planet med start i punkten P_a och slut i P_b:



Om kurvan är fysikalisk kan vi till varje punkt $P=(x,y)$ på kurvan associera en tid t. Säg att starttiden vid P_a är $t=a$ och sluttiden är $t=b$. Då kan vi till varje punkt $P=(x,y)$ associera en tidpunkt i intervallet $I=[a,b]$. Det är klart att varje $P=(x,y)$ på kurvan motsvaras av precis en tidpunkt. Kan därför betrakta x-koord. och y-koord. som <u>funktioner</u> av tid! Dvs.

$$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{för } t \in I$$

Man kallar detta för en <u>parametrisk kurva</u>!

Definition: En parametrisk kurva γ i xy-planet är ett ordnat par av kont. funktioner (f, g) def. över ett gemensamt intervall I. Ekvationerna

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{för } t \in I$$

kallas för parametriska ekv. för kurvan γ och den ober. variabeln t kallas för kurvans parameter.

Notera: I def. ovan starter man med funktionerna f och g och får ur dessa punkterna (x, y) på γ. Om man ist. starter med punkterna (x, y) och anpassar funktionen f och g på I till dessa så kallas kurvan för en plan kurva och (f, g) samt I kallas för en parametrisering av kurvan.

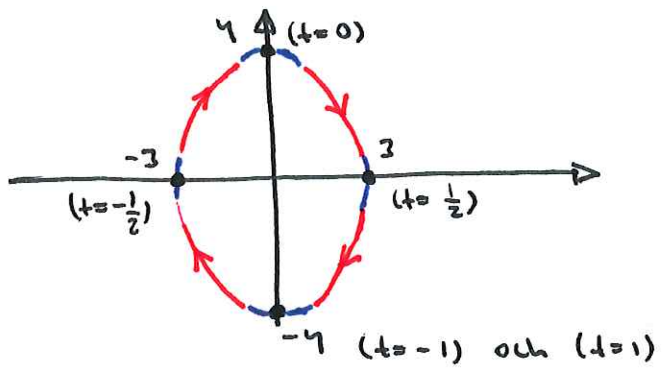
Ex: Punkterna $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, beskriver en cirkel med radie r och m.p. i origo. En parametrisering av denna cirkel är $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ över $I = [0, 2\pi)$, dvs.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

På andra hållet; funktionerna $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ över $I = [0, 2\pi)$ genererar en parametrisk kurva. I detta fallet utgörs denna parametriska kurva av cirkeln med radie r och m.p. i origo.

Ex: (8.2.7) Skissa den parametriska kurvan given av $x = 3\sin \pi t$ och $y = 4\cos \pi t$ över $-1 \leq t \leq 1$.
Hitta också dess kartesiska ekv., dvs. kurvans ekv. uttryckt i x och y.

Lösning: Börja med att pricka ut några "lätta" punkter i xy-planet, t.ex. de som fås då $t = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ (till att börja med).



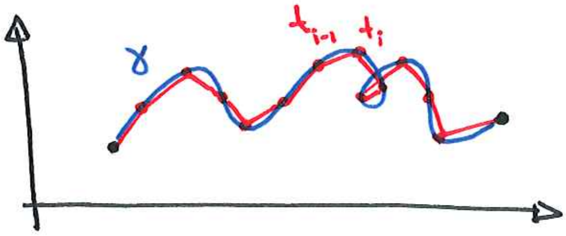
Ellips med halvaxlarna $a = 3$ och $b = 4$?
I så fall skulle alltså $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$. Sant ?

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{\cancel{3^2} \cdot \sin^2 \pi t}{\cancel{9}} + \frac{\cancel{4^2} \cdot \cos^2 \pi t}{\cancel{16}} = \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = 1$$

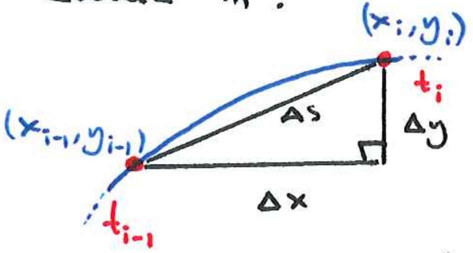
OK! $\square$

Kurvlängder: Givet en parametrisk kurva γ s.a. $x = f(t)$ och $y = g(t)$ för $a \leq t \leq b$, ~~vad~~ vilken är kurvans totala längd ? Vi kan anta att $f'(t)$ och $g'(t)$ är kontinuerliga.

Försök att bestämma <u>längdelementet</u> ds!



Zooma in!



$$\rightarrow \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

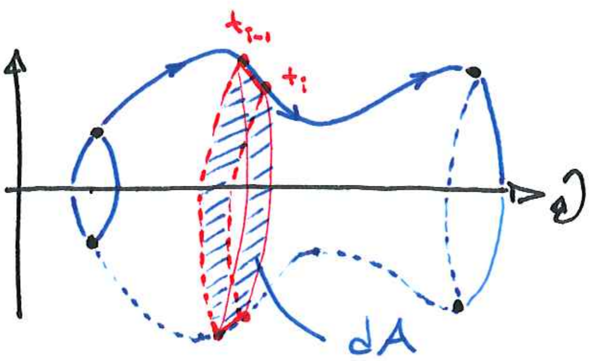
Kom ihåg att $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ och $\frac{dy}{dt} = g'(t)$ så vi får att

$$ds = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

och den totala längden kan därför beräknas som:

$$\boxed{s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt}$$

På liknande sätt kan vi hitta formeln för <u>rotationsarean</u> av en parametrisk kurva:



Arean av bandet (dvs. areaelementet) blir:

$$dA = \text{Omkrets} \times \text{Bredd} = 2\pi |g(t)| \cdot ds =$$

$$= 2\pi |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

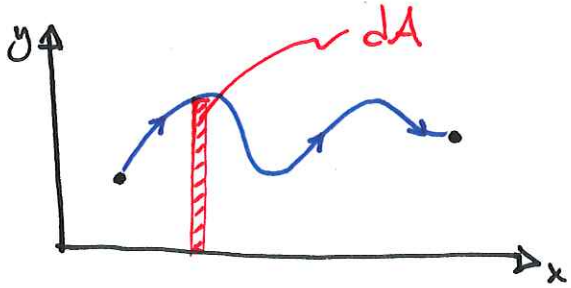
och den totala rotationsarean kan därför beräknas

$$\boxed{A = \int_{t=a}^{t=b} dA = 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt}$$

P.s.s. kan man hitta en motsv. formel för rotationsarean kring y-axeln.

<u>Ett sista tema; arean under en kurva:</u>

Betrakta en parametrisk kurva γ med ekv. $x = f(t)$, $y = g(t)$ där $a \leq t \leq b$.



Här är

$$dA = \text{Höjd} \times \text{Bredd} = g(t) \cdot dx = \left\{ \frac{dx}{dt} = f'(t) \Rightarrow dx = f'(t)\, dt \right\} = g(t) f'(t)\, dt$$

och vi får att totala arean kan beräknas via:

$$\boxed{A = \int_{t=a}^{t=b} dA = \int_a^b g(t) \cdot f'(t)\, dt}$$

Notera: Arean blir negativ om antingen $g(t) \leq 0$ och $f'(t) \geq 0$ eller om $g(t) \geq 0$ och $f'(t) \leq 0$. Vad betyder detta?

(i) $g(t)$ = "kurvans y-värde vid tid t"

(ii) $f'(t)$ = "förändringen av x då tiden ökar från t till $t+dt$".

$f'(t) \leq 0 \iff x$ minskar då t ökar

$\iff$ kurvan rör sig åt vänster 

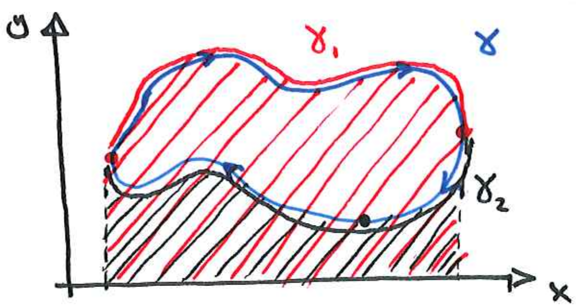
$f'(t) \geq 0 \iff x$ ökar då t ökar

$\iff$ kurvan rör sig åt höger 

Gäller att hålla koll på tecknet av $g(t)$ och $f'(t)$ vid areaberäkning!

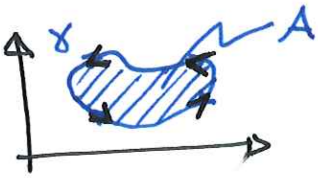
<u>Arean av kurvbegränsat område:</u>

Antag att γ är en sluten kurva:



$$\Rightarrow \int_\gamma g(t) f'(t)\, dt = \int_{\gamma_1} g(t) f'(t)\, dt + \int_{\gamma_2} g(t) f'(t)\, dt =$$

$$= \underbrace{\text{"Arean under } \gamma_1\text{"}}_{\text{positiv! } (g(t)\geq 0,\ f'(t)\geq 0)} + \underbrace{\text{"Arean under } \gamma_2\text{"}}_{\text{negativ! } (g(t)\geq 0,\ f'(t)\leq 0)}$$

$=$ "Arean innanför γ" (!) $= A$ 

Om γ genomlöps ~~medurs~~ moturs blir A negativ!