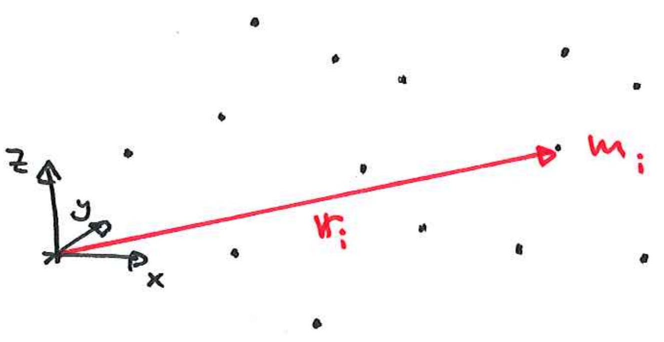
Föreläsning 9

18/11 - 2015

Idag:
- Tyngdpunktsberäkning
- Numeriska metoder för integraler

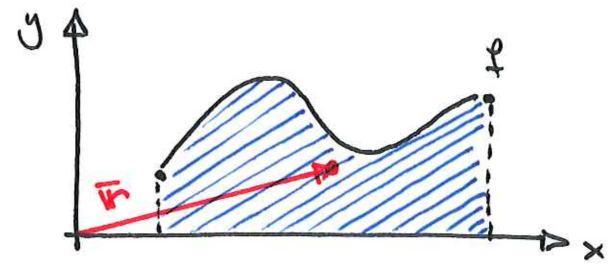
Fysik: Betrakta ett system bestående av tot. n st. partiklar av olika massa:



Partikelsystemets <u>tyngdpunkt</u> definieras då som:

$$(\bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_z) = \bar{\mathbf{r}} := \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

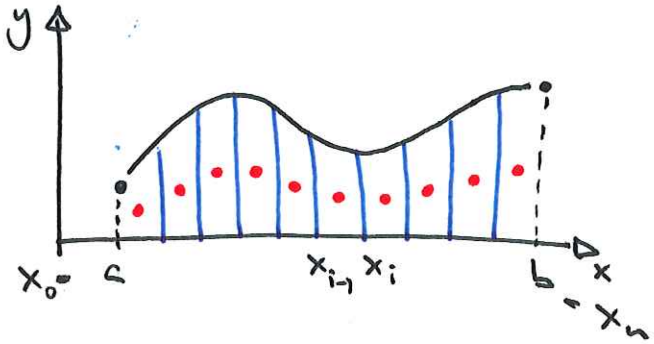
Använd detta för att beräkna tyngdpunkten av en platta som beskrivs genom en funktionsgraf!



Vad blir $\bar{\mathbf{r}} = (r_x, r_y)$? Antag att plattens <u>densitet</u> varierar antingen i x- eller y-riktningen, så antingen är "plattens densitet = $\rho(x)$ eller $\rho(y)$ kg/m^2"

Om funktionen ρ beter sig väl (dvs. deriverbar eller åtminstone kont.) så är $\rho \approx$ konst över små intervall.

<u>Fallet då densiteten = $\rho(x)$:</u> Hacka upp plattan!



Varje stapel väger $m_i \approx \underbrace{\rho\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}_{\text{Densitet } (\approx \text{ konst.})} \cdot \underbrace{f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}_{\text{Höjd}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Bredd}}$

och har sin ungefärliga tyngdpunkt i

$$\bar{r}_i = (\bar{r}_x^i, \bar{r}_y^i) = \left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, \frac{f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}{2}\right)$$

Kan därför tänka plattan som ett partikelsystem med n st. partiklar (dvs. alla •) med massa m_i och position $\bar{r}_i$, $1 \leq i \leq n$. Alltså kan hela plattans ungefärliga tyngdpunkt beräknas som:

Tyngdpunkt: $\bar{r} = (\bar{r}_x, \bar{r}_y)$ där

$$\bar{r}_x \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}^{\text{Position}} \cdot \overbrace{\rho\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot \Delta x}^{\text{Massa}}}{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\rho\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \Delta x}_{\text{Massa}}} \xrightarrow{n \to \infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{\int_a^b x\, f(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, \rho(x)\, dx}$$

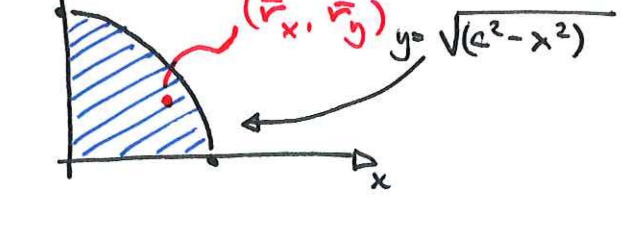
$$\bar{r}_y \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\tfrac{1}{2} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}^{\text{Position : y-led}} \cdot \overbrace{\rho\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot \Delta x}^{\text{Massa}}}{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\rho\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \cdot \Delta x}_{\text{Massa}}} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, \rho(x)\, dx}$$

OBS! Om ist. densiteten $= \rho(y)$ så hackas omr. upp horisontellt och motsv. formler hittas.
Metoden fungerar även i 3D om t.ex. densiteten $= \rho(z)$. Se boken! (kap. 7.4).

Ex: Beräkna tyngdpunkten av omr. som beg. av $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ och har densiteten $\rho(x) = \sigma_0 \cdot x$. ($\sigma_0$ konst.).

Lösning: Rita!



Använd formlerna för $\bar{r}_x$ och $\bar{r}_y$ rakt av! Beräkna först plattans totala massa.

$$m = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sigma_0 x \, dx = \Big[\sigma_0 (a^2 - x^2)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot (-\tfrac{1}{2}) \Big]_0^a =$$

$$= \frac{\sigma_0 a^3}{3}$$

och nu de andra integralerna som förekommer: täljarna i uttrycken för $\bar{r}_x$ och $\bar{r}_y$.

$$\int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sigma_0 x \, dx = \{\text{part. int.}\} =$$

$$= \underbrace{\Big[\left(-\frac{\sigma_0}{3}\right) \cdot (a^2 - x^2)^{3/2} \cdot x \Big]_0^a}_{=0} + \int_0^a \frac{\sigma_0}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} \, dx = \begin{Bmatrix} x = a \cdot \sin\theta \\ dx = a \cos\theta \, d\theta \end{Bmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma_0}{3} (a^2 - a^2 \sin^2\theta)^{3/2} \cdot a \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \sigma_0}{3} \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \sigma_0}{3} \cdot \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \, d\theta = \frac{a^2 \sigma_0}{3} \cdot \Big[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \Big]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi a^2 \sigma_0}{12}}}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \cdot \sigma_0 x \, dx = \frac{\sigma_0}{2} \int_0^a a^2 x - x^3 \, dx = \frac{\sigma_0}{2} \Big[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big]_0^a =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sigma_0 a^4}{4}}}$$

Alltså får vi att

$$\bar{r}_x = \frac{\pi a^2 \sigma_0 / 12}{\sigma_0 a^3 / 3} = \frac{\pi a^2 \sigma_0}{12} \cdot \frac{3}{\sigma_0 a^3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4a}}}$$

$$\bar{r}_y = \frac{\sigma_0 a^4 / 4}{\sigma_0 a^3 / 3} = \frac{\sigma_0 a^4}{4} \cdot \frac{3}{\sigma_0 a^3} = \underline{\underline{\frac{3a}{4}}}$$

□

Numeriska metoder för integraler:

Det grundläggande problemet är att beräkna

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

givet funktionen f. En dator löser inte detta genom att hitta $F(x)$ (dvs. primitiv) utan genom approx. med "staplar."

Fråga: Hur ska man välja staplar?

Vet att: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ där c_i är något tal s.e. $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

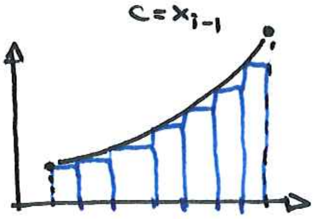
Enkla val är t.ex. $c_i = x_i$ eller $c_i = x_{i-1}$.

Dessa val är dock till nackdel för växande/avt. funktioner eftersom de systematiskt kommer att antingen underskatta eller överskatta $\int_a^b f(x)\,dx$

T.ex:

$c = x_i$

$c = x_{i-1}$

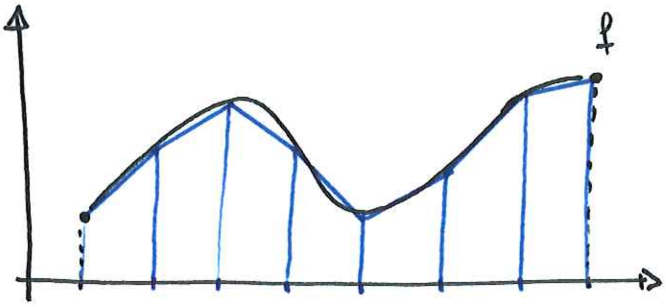


Lösning: Välj ist. c_i = "mittpunkten mellan x_{i-1} och x_i" =

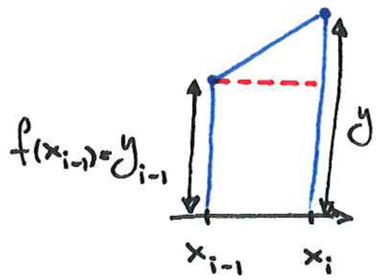
$$= \boxed{\frac{x_i - x_{i-1}}{2} = m_i}$$

→ Mittpunktsmetoden: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\cdot\Delta x.$

Annat sätt: Byt ut staplar mot något som är bättre! T.ex:



dvs. element av typen



$$\Rightarrow \text{Area} = y_{i-1}\cdot \Delta x + \frac{(y_i - y_{i-1})\cdot \Delta x}{2} = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\Delta x$$

På detta vis kan man enkelt skriva den approx. arean under grafen som:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$$

$$= \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_3)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_n)+f(x_{n-1})}{2} \right)$$

$$= \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Denna metod kallas för <u>trapetsmetoden</u> (funktionen heter "trapz" i Matlab).

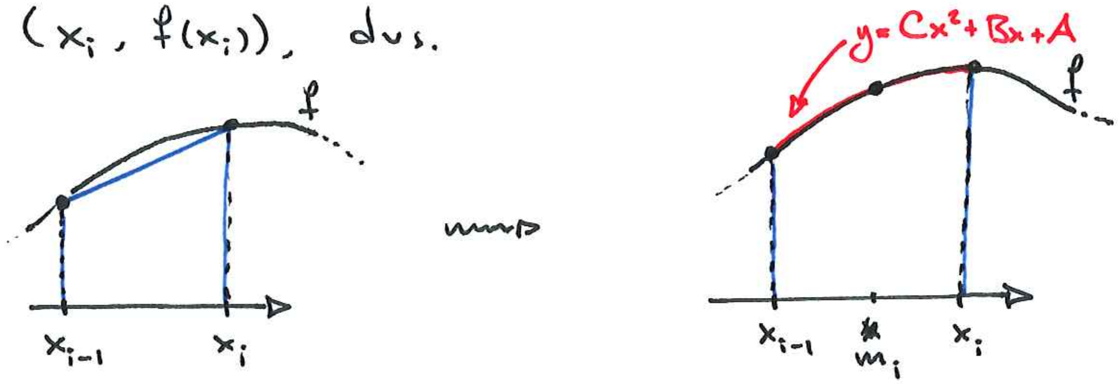
Trapetsmetoden och mittpunktsmetoden presterar lika bra! Man kan visa att

<u>Trapets:</u> $\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \ldots \right| \leq \frac{C\cdot(b-a)^3}{12n^2}$, C - konst.

<u>Mittpunkt:</u> $\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \ldots \right| \leq \frac{C(b-a)^3}{24n^2}$, C - konst.

dvs. felet är av storleken $\sim \frac{1}{n^2}$ (skriver ibland $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$)

<u>En sista metod</u>: Ersätt det linjära taket på staplarna i trapetsmetoden mot 2:a-gradspolynom som går igenom punkterna $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $\left(\overbrace{\frac{x_i+x_{i-1}}{2}}^{m_i}, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right)$ och $(x_i, f(x_i))$, dvs.



Man kan då visa att arean under varje sådan stapel är exakt

$$\text{Area} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} Cx^2 + Bx + A\,dx = \ldots = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right)$$

Lägger man samman alla dessa stapelareor får man

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots$$
$$\ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) =$$
$$= \frac{\Delta x}{3}\Big(f(x_0) + 4\cdot\sum_{i \text{ udda}} f(x_i) + 2\cdot\sum_{i \text{ jämn}} f(x_i) + f(x_n)\Big)$$

Kallas <u>Simpsons metod</u>. "Bättre" än föregående:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \ldots\right| \leq \frac{C\cdot(b-a)^5}{180\cdot n^4}$$

dvs. fel av storlek $\sim \frac{1}{n^4}$ (eller $\mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$).