13/11 - 2015

Föreläsning 7

Idag: • Inversa substitutioner (forts.)
• Generaliserade integraler

Förra gången såg vi att vissa speciella integraler kan lösas m.h.a. s.k. inversa substitutioner.
T.ex. med integrand som innehåller $\sqrt{a^2-x^2}$, testa substitutionen $x = a \cdot \sin\theta$.
Finns andra liknande fall!

Integrand innehåller	Substitution
$\sqrt{a^2+x^2}$ eller $\frac{1}{x^2+a^2}$, $a>0$	$x = a \cdot \tan\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = \frac{1}{\cos\theta}$

och en sista oerhört kraftfull subst. som funkar då integranden är en rationell funktion av $\sin\theta$ och $\cos\theta$, dvs. av typen

$$\frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{1 + \cos^2\theta - \sin\theta} \quad (\text{t.ex.}).$$

Då ska man alltid prova subst. $\boxed{x = \tan\frac{\theta}{2}}$ eftersom

$$\cos\theta = \ldots = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \text{och} \quad d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}.$$

$$\sin\theta = \ldots = \frac{2x}{1+x^2}$$

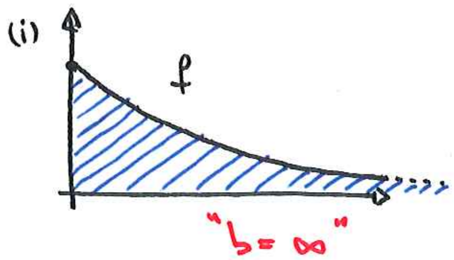
Läs och räkna själva från kap. 6.3!

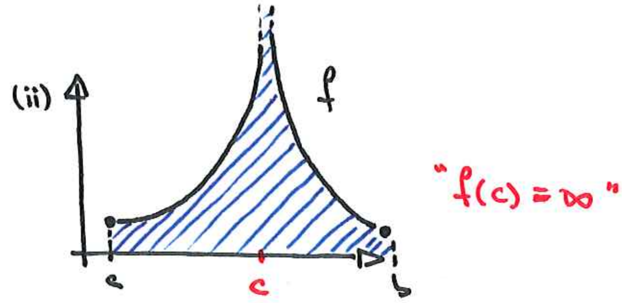
Generaliserade integraler:

En integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kallas generaliserad om det är så att

$$\begin{cases} \text{(i) } a = -\infty \text{ eller } b = \infty. \\ \text{(ii) } f(x) \text{ är obegränsad vid någon punkt i } [a,b]. \end{cases}$$

I bilder:





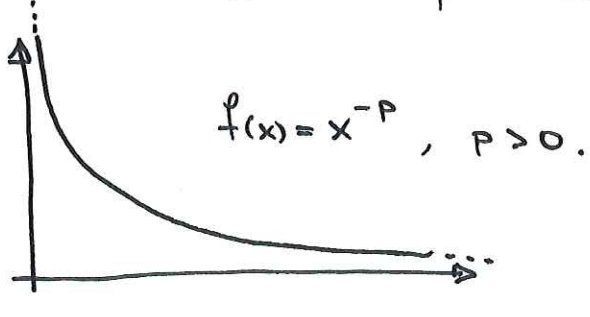
I praktiken beräknas (i) och (ii) som vanliga definita integraler. Insättning av "$\pm\infty$" visar om integralen är konvergent, dvs. ett ändligt tal, eller divergent, dvs. oändligt stor (räknat med tecken).

Man definierar integralerna av typ (i) och (ii) som

(i) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$ (motsv. om $a=-\infty$)

(ii) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{R\to c^-} \int_a^R f(x)\,dx$ (motsv. för $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$)

Ett typfall av generaliserade integraler är de då integranden är $f(x) = x^{-p}$ (speciellt då $p>0$)



<u>Fråga:</u> Vad blir $\int_a^\infty x^{-p}\,dx$ och $\int_0^a x^{-p}\,dx$ $(a>0)$?

<u>Sats:</u> Om $0<a<\infty$ så gäller att

$$\text{(a)}\quad \int_a^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{om } p>1 \\ +\infty, & \text{om } p\le 1 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^a x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & \text{om } p<1 \\ +\infty, & \text{om } p\ge 1 \end{cases}$$

<u>Bevis:</u> (av (b))

Fallet $p<1$:
$$\int_0^a x^{-p}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\int_R^a x^{-p}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_R^a =$$
$$= \lim_{R\to 0^+} \frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{\overset{\to 0}{R^{1-p}}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

eftersom $1-p>0$.

Fallet $p>1$:
$$\int_0^a x^{-p}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\int_R^a x^{-p}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_R^a$$
$$= \lim_{R\to 0^+} \frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{\overset{\to \infty}{R^{1-p}}}{\underset{<0}{1-p}} = \infty.$$

eftersom $1-p<0$.

Fallet $p=1$:
$$\int_0^a x^{-1}\,dx = \int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to 0^+}\Big[\ln|x|\Big]_R^a =$$
$$= \lim_{R\to 0^+} \ln|a| - \overset{\to -\infty}{\ln|R|} = \infty$$

(a) visas på liknande sätt ! $\square$