Repetition 1

Måndag:

- Summor

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$$

a_i	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99$
i	1 2 3 4 5 6 … 99

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot i$$

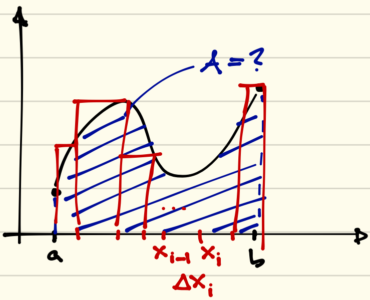
$$a_i = i \cdot (-1)^{i+1}$$

Två viktiga fall:

(i) $\sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)d) = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = a \cdot n + \frac{n \cdot (n-1) d}{2}$

(ii) $\sum_{i=0}^{n-1} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow[-1<q<1]{n \to \infty} \frac{a}{1-q}$

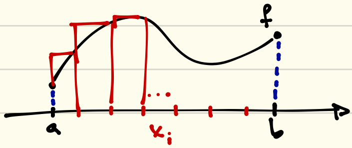
- Approx. av areor



$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Onsdag:

- Riemannsummor



Partition:

$$P = \{\underset{\overset{\|}{a}}{x_0}, x_1, \dots, x_{n-1}, \underset{\overset{\|}{b}}{x_n}\}$$

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} A_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\cdot\Delta x_i$$ (<u>nedre</u> Riemannsumman)

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\cdot\Delta x_i$$ (<u>övre</u> Riemannsumman)

$\Rightarrow$ $L(f,P) \le$ alla $A_n \le U(f,P)$

Konstruktionen med stapler ok för att beräkna A om

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} L(f,P) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} U(f,P) = I \quad \text{(tal)}$$

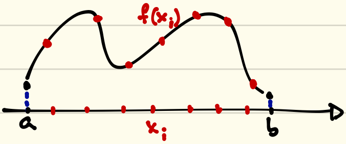
$\Rightarrow$ $I =$ Arean under grafen till f

Talet I kallas den definita (eller obestämda) integralen av f över $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Torsdag:

• Medelvärdessatsen för integraler



$$\frac{\left(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\right)\cdot\Delta x}{n\cdot\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x}{b-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\underline{\bar{f}}}$$

Sats: (M.V.S) Om f kont. på $[a,b]$ så finns en punkt $c\in[a,b]$ s.a.

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}$$

• Analysens huvudsats

Antag f kont. på int. I där $a\in I$.

(i) Om $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$, dvs. $\cancel{\frac{d}{dx}}\cancel{\int_a^x} f(t)\,\cancel{dt} = f(x)$.

(ii) Om $G(x)$ primitiv till $f(x)$ så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b)-G(a)$$

oavsett val av primitiv funktion $G(x)$!

Obestämd integral: $\int f(x)\,dx$ = "alla primitiva funktioner till f"

Fredag:

- Variabelsubstitution

Vill lösa $\int f(x)\,dx$ (eller $\int_a^b f(x)\,dx$)

$$f(x) \stackrel{?}{=} g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Kedjeregeln: $g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{d}{dx}(g(h(x)))$

dvs. $g(h(x)) + C$ är primitiv funktion till $g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}(g(h(x)))\,dx = g(h(x)) + C$$

I praktiken:

$$\int x \cdot e^{-(x^2+3)}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = -(x^2+3) \\ du = -2x\,dx \end{matrix} \right\} = \int e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du =$$

$$= -\frac{e^u}{2} + C = -\frac{e^{-(x^2+3)}}{2} + C.$$