Repetition 4

Måndag:

- Inledning till ODE

  ODE = "ekv. som relaterar en funktion $y = f(x)$ och dess derivator $y', y'', \dots, y^{(n)}$ till varandra"

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = f(x)$$

Olika viktiga fall:

(i) $f(x) = 0 \rightsquigarrow F(\dots) = 0$ homogen ekvation

$f(x) \neq 0 \rightsquigarrow$ inhomogen

(ii) $F((y_1+y_2)^{(n)}, \dots, (y_1+y_2)', (y_1+y_2), x) =$

$= F(y_1^{(n)}, \dots, y_1', y_1, x) + F(y_2^{(n)}, \dots, y_2', y_2, x)$

$\rightsquigarrow$ linjär ekvation

Annars icke-linjär.

T.ex. $y'' + \sin(x) \cdot y' + x^2 \cdot y = e^x$ linjär

$y'' + \sin(x) \cdot (y')^2 + x^2 \cdot y = e^x$ icke-linjär

Två satser:

(a) F linjär, $f(x) = 0$, y_1 och y_2 två olika lösn. till $F(\dots) = 0 \Rightarrow y = A \cdot y_1 + B \cdot y_2$ lösn.

(b) F linjär, $f(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ lösn. till } F(\dots) = 0 \\ y_2 \text{ lösn. till } F(\dots) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 + y_2 \text{ lösn. till } F(\dots) = f(x).$$

Onsdag:

- Separabla ekvationer

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)\cdot g(y)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow G(y) + \cancel{C_1} = F(x) + C_2$$

T.ex. $y' = x^2 \cdot e^y \Rightarrow \underbrace{\int e^{-y}\,dy}_{= -e^{-y}} = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

$\rightsquigarrow e^{-y} = C - \frac{x^3}{3} \Rightarrow y = -\ln\left(C - \frac{x^3}{3}\right)$

- Linjära 1:a-ordn. ODE

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)$$

(i) $\mu(x) = \int p(x)\,dx$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}\cdot y\right) = \mu'(x)\cdot e^{\mu(x)}\cdot y + e^{\mu(x)}\cdot y' =$

$= e^{\mu(x)}\cdot \overbrace{\left(y' + \underbrace{\mu'(x)}_{p(x)}\cdot y\right)}^{= q(x)} = q(x)\cdot e^{\mu(x)}$

(iii) $e^{\mu(x)}\cdot y = \cancel{\int}\frac{\cancel{d}}{\cancel{dx}}\left(e^{\mu(x)}\cdot y\right)\cancel{dx} = \int q(x)\,e^{\mu(x)}\,dx$

$\Rightarrow y = e^{-\mu(x)} \int q(x)\cdot e^{\mu(x)}\,dx.$