Repetition 5

Måndag:

- 2:a-ordn. linjära homogena ODE med konstanta koefficienter

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = 0 \quad , \; p,q \in \mathbb{R}$$

Ansätt $y = C\cdot e^{rx}$

$$(Ce^{rx})'' + p\cdot (Ce^{rx})' + q\cdot (Ce^{rx}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r^2 + p\cdot r + q = 0 \quad \text{(kar. ekv.)}$$

Tre fall:

(i) två reella rötter $\rightsquigarrow$ $r_{1,2} = a \pm b$

$\rightsquigarrow$ $y(x) = C_1\cdot e^{r_1 x} + C_2\cdot e^{r_2 x}$

(ii) en reell dubbelrot $\rightsquigarrow$ $r_1 = r_2 = r$

$\rightsquigarrow$ $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$

(iii) två komplexa rötter $\rightsquigarrow$ $r_{1,2} = a \pm ib$

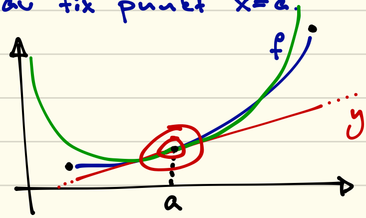
$\rightsquigarrow$ $y(x) = C_1\cdot e^{(a+ib)x} + C_2\cdot e^{(a-ib)x} =$

$$= \ldots = e^{ax}\cdot (A_1\cdot \sin(bx) + A_2\cdot \cos(bx)).$$

Onsdag:

- Taylorpolynom

Vill approximera funktion f(x) m.h.a. polym i närheten av fix punkt x=a.

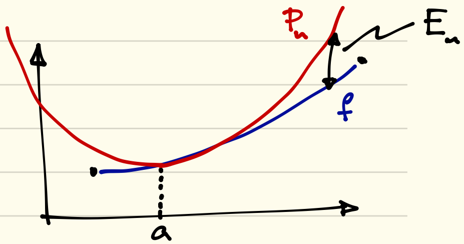


Taylorpolynom av grad n betecknas $P_n(x)$ där

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\Rightarrow$ $f(x) \approx P_n(x)$ nära $x=a$

Vad blir felet?



$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$\rightsquigarrow E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$\Rightarrow$ $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, s mellan a och x.

- $E_n(x) > 0 \rightsquigarrow P_n(x)$ underskattar $f(x)$
- $E_n(x) < 0 \rightsquigarrow P_n(x)$ överskattar $f(x)$

<u>O-notation:</u> $E_n(x) = O((x-a)^{n+1})$.

Fredag:

- Gränsvärden och Taylorpolynom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \text{typ } \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \right\} = \lim_{x\to a} \frac{P_n(x) + O((x-a)^{n+1})}{p_m(x) + O((x-a)^{m+1})} = \dots$$

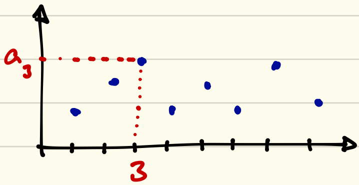
$P_n(x)$ och $p_m(x)$ Taylorpolynom för f och g runt $x=a$.

- Talföljder och konvergens

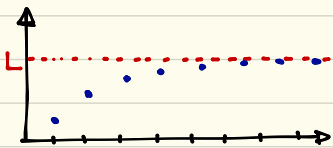
  Talföljd = "ordnad sekvens av tal"

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \rightsquigarrow \{a_n\}$$

Grafiskt:



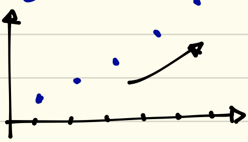
Konvergens:



$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$$

Divergens = "inte konvergens"

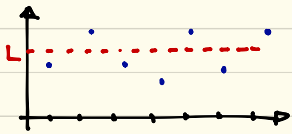
(i)



"$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty$"

divergent mot $\pm\infty$

(ii)



$\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar ej

divergent