Repetition 6

Måndag:

- Serier och konvergenstest

Serie = "Oändlig summa"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \to \begin{cases} \text{ändligt tal} & \text{konvergent} \\ \pm\infty & \\ \text{varken eller} & \end{cases} \Big\} \text{ divergent}$$

Ex: (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \text{div.}, & \text{annars} \end{cases}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konv.}, & p > 1 \\ \text{div.}, & p \leq 1 \end{cases}$

Hur testa konvergens/divergens av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(i) integraltestet (om $a_n = f(n)$)

Beräkna $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{konv}}{\underset{\text{div}}{\longleftrightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1} \rightsquigarrow \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{\infty} \text{"="} \infty$

(ii) jämföra med annan serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergens

(iii) Kvot- och rottesten

$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\sigma = (a_n)^{1/n}$

$0 \leq \rho, \sigma < 1$	$\rho, \sigma = 1$	$\rho, \sigma > 1$
konv.	vet ej	div.

Onsdag:

- Absolut/betinged konvergens

Vad gäller för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ om $a_n \not> 0$?

Om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv. $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Konvergent men ej abs. konv. = betinget konvergent

Sats:
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_{n+1} \cdot a_n < 0 \\ \bullet\ |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ \bullet\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

- Potensserier (runt $x=c$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots$$

Ex: $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Vanliga funktioner

Potensserier

$$f(x) \approx P_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \text{"}P_\infty(x)\text{"}$$

$$f(x) \overset{?}{=} P_\infty(x)$$

Taylorserie !