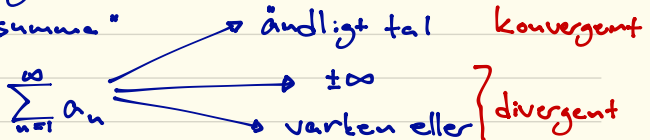


Repetition 6

Måndag:

- Serier och konvergenstest

Serie = "Oändlig summa"



Ex: (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \text{div.}, & \text{annars} \end{cases}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konv.}, & p > 1 \\ \text{div.}, & p \leq 1 \end{cases}$

Hur testa konvergens/divergens av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(i) integraltestet (om $a_n = f(n)$)

Beräkna $\int_1^{\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{konv} \\ \text{div} \end{cases} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1} \rightsquigarrow \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^{\infty} = \infty$

(ii) jämföra med annan serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konvergens} \\ \text{divergens} \end{cases} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \end{cases}$

(iii) Kvot- och rottesten

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\sigma = (a_n)^{1/n}$$

$$0 \leq \rho, \sigma < 1$$

konv.

$$\rho, \sigma = 1$$

vet ej

$$\rho, \sigma > 1$$

div.

Onsdag:

- Absolut/betingad konvergens

Vad gäller för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ om $a_n \neq 0$?

Om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv. \Leftrightarrow $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Konvergent men ej abs. konv. = betingad konvergent

Sats: $\left. \begin{array}{l} \bullet a_n \text{ s.t. } a_n < 0 \\ \bullet |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$

- Potensserier (runt $x=c$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

Ex: $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Vanliga funktioner

Potensserier

$f(x) \approx P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} "P_{\infty}(x)"$

$f(x) \stackrel{?}{=} P_{\infty}(x)$ Taylorserie!