MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015–11–13 kl. 13.15 – 14.00

Analys i en variabel Z/TD/AT, Dugga 1

Dugga 1

NAMN: ....

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **Z** **TD** **AT**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna integralen (0.5 p)

$$\int_0^1 3x^2 - 6x + 9\, dx.$$

Lösning:

$$\int_0^1 3x^2-6x+9\,dx = \left[x^3-3x^2+9x\right]_0^1 = 1-3+9 = \underline{\underline{7}}$$

Svar: Värdet av integralen är 7. $\square$

2. Beräkna den obestämda integralen (0.5 p)

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx.$$

Lösning:

Börja med att beräkna nämnarens nollställen och faktorisera polynomet.

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Vi kan alltså skriva $x^2-x-2 = (x+1)\cdot(x-2)$. Använd nu partialbråksuppdelning för att beräkna integralen!

$$\int \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)} dx = \left\{ \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \overset{\text{H.P.}}{\Longrightarrow} A = -\tfrac{1}{3},\ B = \tfrac{7}{3} \right\} =$$

$$= \frac{7}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

där talet C är en godtycklig integrationskonstant.

Svar: $\int \frac{2x+3}{x^2-x-2} dx = \frac{7}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$

$\square$

3. Beräkna integralen (0.5 p)

$$\int_{-1}^{1} \sin(x) \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right) dx.$$

Lösning:

Notera att funktionen $\ln(\sqrt{4-x^2})$ är jämn och att $\sin(x)$ är udda. Den totala integranden är därmed udda och integralens värde är 0 eftersom integrationsintervallet $[-1,1]$ är symmetriskt runt origo!

Svar: Integralens värde är 0.

4. Visa att (0.5 p)

$$\int_0^a x^{10}e^{-x^2/2}dx \leq \begin{cases} a^{11}e^{-a^2/2}, & \text{om } 0 \leq a \leq \sqrt{10} \\ 10^5 \cdot e^{-5} \cdot a, & \text{om } a > \sqrt{10}. \end{cases}$$

Tips: Medelvärdessatsen för integraler över intervallet $[0, a]$!

<u>Lösning:</u> Av M.V.S. för integraler över intervallet $[0,a]$ får vi att det finns ett tal $c \in [0,a]$ s.a.

$$\frac{1}{a-0}\int_0^a x^{10}e^{-x^2/2}dx = c^{10} \cdot e^{-c^2/2}.$$

Vad kan vi säga om högerledet i denna likhet? Undersök integranden!

$$f(x) = x^{10} \cdot e^{-x^2/2} \Rightarrow f'(x) = 10x^9e^{-x^2/2} + x^{10} \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) = (10-x^2) \cdot x^9 \cdot e^{-x^2/2}.$$

Vi har alltså kritiska punkter i $x = \pm\sqrt{10}$ samt $x = 0$. Vidare är det klart att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ och att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och alltså måste $x = \sqrt{10}$ svara mot en global maxpunkt! Eftersom $c \in [0,a]$ följer det därför att:

$$\int_0^a x^{10} e^{-x^2/2}dx = f(c) \cdot a \leq \begin{cases} a^{10} \cdot e^{-a^2/2} \cdot a = a^{11} \cdot e^{-a^2/2}, & \text{om } 0 \leq a \leq \sqrt{10} \\ (\sqrt{10})^{10} \cdot e^{-(\sqrt{10})^2/2} \cdot a = 10^5 \cdot e^{-5} \cdot a, & \text{om } a \geq \sqrt{10} \end{cases}$$

V.S.V.

□