MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015–11–13 kl. 13.15 – 14.00

Analys i en variabel Z/TD/AT, Dugga 1

Dugga 1

NAMN: ....

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **Z** **TD** **AT**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna integralen (0.5 p)

$$\int_0^1 -3x^2 + 8x + 7\, dx.$$

Lösning:

$$\int_0^1 -3x^2+8x+7\,dx = \left[-x^3+4x^2+7x\right]_0^1 = -1+4+7 = \underline{\underline{10}}$$

Svar: Värdet av integralen är 10. $\square$

2. Beräkna den obestämda integralen (0.5 p)

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x-3}dx.$$

Lösning:

Börja med att beräkna nämnarens nollställen och faktorisera polynomet.

$$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3} = -1\pm\sqrt{4} = -1\pm 2 \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=1$$

Vi kan alltså skriva $x^2+2x-3=(x+3)\cdot(x-1)$. Använd nu partialbråksuppdelning för att beräkna integralen!

$$\int \frac{x+4}{(x+3)(x-1)}dx = \left\{\frac{x+4}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1} \overset{H.P}{\Longrightarrow} A=-1/4,\ B=5/4\right\} =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$$

där talet C är en godtycklig integrationskonstant.

Svar: $\int \frac{x+4}{x^2+2x-3}dx = \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$.

$\square$

3. Beräkna integralen (0.5 p)

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cos\left(\sqrt{4-x^2}\right)\, dx.$$

<u>Lösning:</u>

Notera att funktionen $\cos(\sqrt{4-x^2})$ är <u>jämn</u> och att x^3 är <u>udda</u>. Den totala integranden är därmed udda och integralens värde är 0 eftersom integrationsintervallet $[-1,1]$ är symmetriskt runt origo!

<u>Svar:</u> Integralens värde är 0.

4. Visa att (0.5 p)

$$\int_0^a x^{10}e^{-x^2/2}dx \leq \begin{cases} a^{11}e^{-a^2/2}, & \text{om } 0 \leq a \leq \sqrt{10} \\ 10^5 \cdot e^{-5} \cdot a, & \text{om } a > \sqrt{10}. \end{cases}$$

Tips: Medelvärdessatsen för integraler över intervallet $[0, a]$!

Lösning: Av M.V.S. för integraler över intervallet $[0,a]$ får vi att det finns ett tal $c \in [0,a]$ s.a.

$$\frac{1}{a-0}\int_0^a x^{10}e^{-x^2/2}dx = c^{10} \cdot e^{-c^2/2}.$$

Vad kan vi säga om högerledet i denna likhet? Undersök integranden!

$f(x) = x^{10} \cdot e^{-x^2/2} \Rightarrow f'(x) = 10x^9 e^{-x^2/2} + x^{10} \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) = (10 - x^2) \cdot x^9 \cdot e^{-x^2/2}$.

Vi har alltså kritiska punkter i $x = \pm\sqrt{10}$ samt $x = 0$. Vidare är det klart att $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ och att $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ och alltså måste $x = \sqrt{10}$ svara mot en global maxpunkt! Eftersom $c \in [0,a]$ följer det därför att:

$$\int_0^a x^{10} e^{-x^2/2}dx = f(c) \cdot a \leq \begin{cases} a^{10} \cdot e^{-a^2/2} \cdot a = a^{11} \cdot e^{-a^2/2}, & \text{om } 0 \leq a \leq \sqrt{10} \\ (\sqrt{10})^{10} \cdot e^{-(\sqrt{10})^2/2} \cdot a = 10^5 \cdot e^{-5} \cdot a, & \text{om } a \geq \sqrt{10} \end{cases}$$

V.S.V.

$\square$