MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015–11–27 kl. 13.15 – 14.00

Analys i en variabel Z/TD/AT, Dugga 2

Dugga 2

NAMN: ....

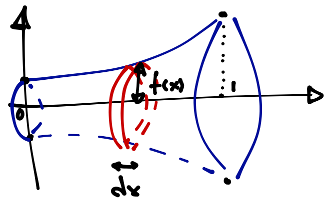
Personnummer: ....

Program: (ringa in) **Z** **TD** **AT**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna volymen av den kropp som fås genom att rotera funktionen $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, runt x-axeln. (0.5 p)

Lösning: Rita!



Det gäller att $dV = \pi(f(x))^2 dx$

$\Rightarrow V = \int_0^1 dV = \int_0^1 \pi (e^x)^2 dx = \int_0^1 \pi e^{2x} dx =$

$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - e^0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}}$ v.e.

Svar: Volymen är $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ v.e.

$\square$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen (0.5 p)

$$y' = x^2 e^y.$$

Lösning: Diff.ekv. är separabel!

$y' = x^2 e^y \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ och eftersom $\int e^{-y} dy = -e^{-y}$ (konst $= 0$)

$\Rightarrow -e^{-y} = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -\ln\left(C - \frac{x^3}{3}\right)}}$, där $x^3 < 3C$.

Svar: Alla lösningar är på formen $y = -\ln\left(C - \frac{x^3}{3}\right)$.

$\square$

3a. Antag att f är en deriverbar funktion sådan att $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ och som uppfyller likheten $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ för alla tal $a, b \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av detta att f uppfyller differentialekvationen $f'(x) = f(x)$. (0.5 p)
Tips: Använd derivatans definition.

b. Lös randvärdesproblemet (0.5 p)

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Lösning:

a, Av derivatans definition får vi att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} =$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}}_{= f'(0)} = \{f'(0)=1\} = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

och vi har därmed visat att $f'(x) = f(x)$.

b, De enda lösningarna till diff. ekv. $f'(x) = f(x)$ är $f_1(x) = C \cdot e^x$ och $f_2(x) = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ kan vi utesluta den triviala lösningen $f_2(x)$ och får då att $f(x) = C \cdot e^x$ där $f(0) = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = 1 \iff C = 1$.

Svar: Lösningen ges av funktionen $f(x) = e^x$.

□