MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2015–11–27 kl. 13.15 – 14.00

Analys i en variabel Z/TD/AT, Dugga 2

Dugga 2

NAMN: ....

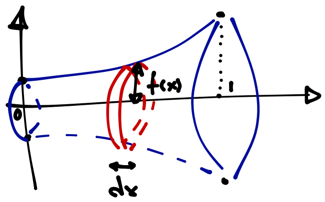
Personnummer: ....

Program: (ringa in) **Z** **TD** **AT**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna volymen av den kropp som fås genom att rotera funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 \le x \le 1$, runt x-axeln. (0.5 p)

Lösning: Rita!



Det gäller att $dV = \pi (f(x))^2 dx$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 dV = \int_0^1 \pi (x^2+1)^2 dx = \int_0^1 \pi (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{28\pi}{15} \text{ v.e.}$$

Svar: Volymen är $\frac{28\pi}{15}$ v.e.

$\square$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen (0.5 p)

$$y' = e^x y^2.$$

Lösning: Diff.ekv. är separabel!

$y' = e^x \cdot y^2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int e^x dx = e^x + C$ och eftersom $\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}$ (konst = 0)

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = e^x + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{e^x + C}$, där $e^x \neq C$.

Svar: Alla intressanta lösningar är på formen $y = -\frac{1}{e^x + C}$.
Finns dock också en trivial lösning, nämligen $y = 0$.

3a. Antag att f är en deriverbar funktion sådan att $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ och som uppfyller likheten $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ för alla tal $a, b \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av detta att f uppfyller differentialekvationen $f'(x) = f(x)$. (0.5 p)
Tips: Använd derivatans definition.

b. Lös randvärdesproblemet (0.5 p)

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Lösning:

a) Av derivatans definition får vi att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} =$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}}_{= f'(0)} = \{ f'(0) = 1 \} = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

och vi har därmed visat att $f'(x) = f(x)$.

b) De enda lösningarna till diff.ekv. $f'(x) = f(x)$ är $f_1(x) = C \cdot e^x$ och $f_2(x) = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ kan vi utesluta den triviala lösningen $f_2(x)$ och får då att $f(x) = C \cdot e^x$ där $f(0) = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = 1 \iff C = 1$.

Svar: Lösningen ges av funktionen $f(x) = e^x$.

$\square$