MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015–12–11 kl. 13.15 – 14.00

Analys i en variabel Z/TD/AT, Dugga 3

Dugga 3

NAMN: ....

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **Z** **TD** **AT**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna Taylorpolynomet $P_2(x)$ för funktionen $f(x) = \sin(x)$ runt punkten $x = \frac{\pi}{4}$. (0.5 p)

Lösning: Måste beräkna $f(\pi/4)$, $f'(\pi/4)$ och $f''(\pi/4)$.

$f(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$

och därmed får vi att

$$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

$\square$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 0$. (0.5 p)

Lösning: Den karakteristiska ekv. tillhörande diff.ekv. är

$$r^2 + r - 2 = 0$$

som har lösningarna: $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -2.$

Vi får därför den allmänna lösningen som

$$y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

3. Nu ska det handla om oändliga produkter! Precis på samma sätt som man använder Σ-symbolen för summor använder man symbolen Π (versalen av den grekiska bokstaven π) för produkter. Med kännedom om detta, beräkna den oändliga produkten: (0.5 p)

$$\prod_{n=0}^{\infty} 2^{(1/2)^n}.$$

Lösning: Genom vanliga potensregler kan vi skriva om produkten enligt:

$$\prod_{n=0}^{\infty} 2^{(1/2)^n} = 2^1 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdot \ldots = 2^{\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n}$$

Notera här att serien i exponenten är geometrisk och kan därför beräknas som

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

så $$\prod_{n=0}^{\infty} 2^{(1/2)^n} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$

Svar: Produktens värde är 4.

4. Visa att talföljden

$$\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

är växande. (0.5 p)

Tips: Studera den logaritmerade talföljden, använd logaritmlagar och koppla detta till den ursprungliga följden!

Lösning: Betrakta den logaritmerade serien!

$$\rightsquigarrow \left\{ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\} = \left\{ n\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right\}$$

Om vi kan visa att den logaritmerade följden är växande så måste även den ursprungliga följden vara det eftersom $\ln(x)$ är en växande funktion. Det gäller att:

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= n\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n\cdot\ln\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n\cdot\ln\Big(\overbrace{\frac{n+2}{n}}^{>1}\Big) + \ln\Big(\overbrace{1+\frac{1}{n+1}}^{>1}\Big) > 0$$

Och alltså är den logaritmerade följden växande!

$\square$