Chalmers Tekniska Högskola

Matematisk analys i en variabel
Satser, definitioner och bevis

Matematisk analys i en variabel
(TMV138, TMV181) HT2016

5 december 2016 – Göteborg

Obs! Bevisen i denna samling är grupperade och ordnade så som de var angivna för kursen TMV138/TMV181 HT2016. Finns det något att påpeka kan ni skriva till `suhren@student.chalmers.se`.

Innehåll

1 Integralkalkylens medelvärdessats

1.1 Sats

Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ gäller det att

$$\exists c \in [a,b] \ ; \ \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

1.2 Bevis:

Eftersom f är kontinuerlig på $[a,b]$ antar f ett minsta värde m och största värde M på intervallet i punkterna $x = l$ respektive $x = u$ (enligt satsen om största och minsta värde). Vi har då att

$$f(l) = m \leq f(x) \leq M = f(u) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Integrerar vi båda leden får vi att

$$\int_a^b m \ dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M \ dx \iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \iff$$
$$\iff f(l) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M = f(u)$$

Eftersom f är kontinuerlig på intervallet säger satsen om mellanliggande värden att

$$\exists c \in [a,b] \ ; \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

$\blacksquare$

2 En till medelvärdessats för integraler

2.1 Sats

Antag att f och g är kontinuerliga på $[a,b]$. Låt $g \geq 0$ eller $g < 0$ på intervallet, det vill säga g växlar ej tecken. Då gäller det att

$$\exists \xi \in [a,b]; \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

2.2 Bevis:

Kalla integralen ovan I. Vi visar fallet då $g(x) \geq 0$ och $I > 0$.

Eftersom f är kontinuerlig på intervallet finns det ett f_{min} och f_{max} på $[a,b]$ (enligt satsen om största och minsta värde).

Vi har då att

$$f_{min} \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq f_{max} \cdot g(x).$$

Vi integrerar båda leden:

$$f_{min} \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx = I \leq f_{max} \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Låt $J = \int_a^b g(x)dx$. Vi kan då skriva

$$f_{min} \cdot J \leq I \leq f_{max} \cdot J \iff f_{min} \leq \frac{I}{J} \leq f_{max}.$$

Eftersom f kontinuerlig på intervallet ger satsen om mellanliggande värde att

$$\exists \xi \in [a,b]; f(\xi) = \frac{I}{J}.$$

Efter omskrivning får vi då att

$$I = f(\xi) \cdot J = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

$\blacksquare$

3 Variabelsubstitution i integral för obestämd och bestämd integral

3.1 Sats

Låt f och g vara två funktioner. Antag att

I. g är kontinuerligt deriverbar på $[a,b]$

II. $g(a) = A$ och $g(b) = B$

III. f är kontinuerlig på g:s värdemängd i intervallet

Då gäller det att:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_A^B f(t)dt.$$

Eller i det obestämda fallet:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

3.2 Bevis:

Låt F vara en primitiv funktion till f. Det vill säga $F'(t) = f(t)$. Enligt kedjeregeln gäller det då att

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Integrerar vi båda leden får vi att

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_{x=a}^b = F(g(b)) - F(g(a)) =$$
$$= F(B) - F(A) = [F(t)]_{t=A}^B = \int_A^B f(t)dt.$$

$\blacksquare$

4 Partiell integration för obestämd integral

4.1 Sats

Låt f och g vara två funktioner. Antag att

I. f har primitiv funktion F

II. f är kontinuerlig

III. g' är kontinuerlig

Då gäller det att

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

4.2 Bevis:

Vi deriverar båda leden och får

$$\frac{d}{dx}\int f(x)g(x)dx = \frac{d}{dx}\left(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\right).$$

Integralerna försvinner genom derivering. Den första termen i högerledet deriveras med hjälp av produktregeln. Vi får då att

$$f(x)g(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = F'(x)g(x).$$

Då $F'(x) = f(x)$ har vi att $VL = HL$ och vi har visat att satsen stämmer.

$\blacksquare$

5 Konvergens och divergens för p-integraler

5.1 Sats

Låt $a \in (0, \infty)$. Då gäller att

$$\text{(a)} \quad \int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_a^\infty x^{-p}\ dx \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{p-1} \text{ om } p > 1 \\ \text{divergerar till } \infty \text{ om } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \int_0^a \frac{1}{x^p} dx = \int_0^a x^{-p}\ dx \begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p} \text{ om } p < 1 \\ \text{divergerar till } \infty \text{ om } p \geq 1 \end{cases}$$

5.2 Bevis:

Vi bevisar endast (b) eftersom beviset för (a) är likartat. Vi har att

$$\int_0^a x^{-p} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^a x^{-p} dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_c^a = \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_c^a = \lim_{c \to 0^+} \frac{a^{1-p} - c^{1-p}}{1-p}$$

För $p < 1$ har vi att

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{a^{1-p} - c^{1-p}}{1-p} = \left\{ c^{1-p} \underset{c \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \right\} = \frac{a^{1-p}}{1-p}$$

För $p > 1$ har vi istället att

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{a^{1-p} - c^{1-p}}{1-p} = \left\{ c^{1-p} \underset{c \to 0^+}{\longrightarrow} \infty \right\} = \infty$$

För $p = 1$ har vi till sist att

$$\int_0^a x^{-1} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^a x^{-1} dx = \lim_{c \to 0^+} [\ln x]_c^a = \lim_{c \to 0^+} (\ln a - \ln c) = \left\{ \ln c \underset{c \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \right\} = \infty$$

$\blacksquare$

6 Jämförelsekriteret för serier

6.1 Sats

Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ är positiva serier med $a_k \leq b_k$ $\forall k$. Då gäller det att

I. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\implies \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

II. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\implies \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

(Här är påstende I ekvivalent med påstående II).

6.2 Bevis:

Vi bevisar detta genom argumentet att en series partialsummor måste vara uppåt begränsade för att serien skall vara konvergent. Låt S_k och T_k beteckna partialsummorna till $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ respektive $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ så att

$$S_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k$$
$$T_k = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_k$$

Båda dessa partialsummor är växande och förutsättningarna get $S_k \leq T_k$ $\forall k$.

I. Om den första serien är divergent är S_k inte uppåt begränsad och då kan inte heller T_k vara det. Alltså är även den andra serien divergent.

II. Om den andra serien är konvergent är följden T_k uppåt begränsad och därmed även S_k. Detta ger att första serien är konvergent.

$\blacksquare$

7 Jämförelsekriteret för integraler

7.1 Sats

Låt $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är två kontinuerliga funktioner på intervallet (a,b) och att $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Då gäller det att

I. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ divergent $\implies \displaystyle\int_a^b g(x)dx$ divergent.

II. $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ konvergent $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent.

(Här är påstende I ekvivalent med påstående II).

7.2 Bevis:

I detta beviset använder vi oss av följande hjälpsats: Om f, g och a, b är som ovan och $x \in [a,b]$ gäller det att

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Eftersom båda integranderna är positiva, finns det bara två möjligheter för varje integral. Den kan konvergera till ett positivt tal eller divergera till oändligheten. Eftersom $f(x) \leq g(x)$ på (a,b) följer det av hjälpsatsen att om $a < r < s < b$ så

$$\int_r^s f(x)dx \leq \int_r^s g(x)dx.$$

Satsen vi vill bevisa följer nu genom att vi tar gränserna då $r \to a^+$ och $s \to b^-$.

$\blacksquare$

8 Integralkriteriet

8.1 Sats

Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[N, \infty)$ för något positivt heltal N. Antag att

I. f är kontinuerlig på intervallet

II. $f \geq 0$ på intervallet

III. f är avtagande på intervallet

Då gäller det att

$$\int_N^\infty f(t)dt \text{ konvergent } \iff \sum_{n=N}^\infty f(n) \text{ konvergent.}$$

Med andra ord: divergerar integralen divergerar även serien, eller vice versa.

8.2 Bevis:

Eftersom $f(t)$ är avtagande gäller det att $f(t) \leq f(k)$ om $t \geq k$. Alltså gäller det att

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k)\int_k^{k+1} dt = f(k)\,[t]_k^{k+1} = f(k).$$

$$\therefore \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \quad (*)$$

Uttrycker vi nu ursprungsintegralen i satsen som en summa av dessa delintegraler får vi att

$$\int_N^\infty f(t)dt = \sum_{k=N}^\infty \int_k^{k+1} f(t)dt \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=N}^\infty f(k).$$

Det vill säga om serien är konvergent $\implies$ integralen konvergent. Vi vill nu också visa att det omvända gäller. Då $t \in [k,\, k+1] \implies f(t) \geq f(k+1)$ och vi har att

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dt = f(k+1)\int_k^{k+1} dt = f(k+1)\,[t]_k^{k+1} = f(k+1).$$

$$\therefore \int_k^{k+1} f(t)dt \geq f(k+1) \quad (**)$$

Vi får på ett liknande sätt som förut att

$$\int_N^\infty f(t)dt = \sum_{k=N}^\infty \int_k^{k+1} f(t)dt \overset{(**)}{\geq} \sum_{k=N}^\infty f(k+1) = \left(\sum_{k=N}^\infty f(k)\right) - f(N).$$

Här är $f(N)$ begränsad enligt antagandet att $\int_N^\infty f(t)dt$ är konvergent. Det vill säga om integralen är konvergent $\implies$ serien konvergent.

$\blacksquare$

9 Konvergens och divergens för p-serier

9.1 Sats

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} \begin{cases} \text{konvergerar om } p > 1 \\ \text{divergerar om } p \leq 1 \end{cases}$$

9.2 Bevis:

Vi set att om $p > 0$ är $f(x) = x^{-p}$ positiv, kontinuerlig och avtagande på $[1, \infty)$.

Satsen om p-integraler (sats 5) säger då att integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergerar då $p > 1$ och divergerar då $0 < p \leq 1$.

Integralkriteriet (sats 8) ger då i sin tur att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergerar då $p > 1$ och divergerar då $0 < p \leq 1$.

Om $p < 0$ har vi att $\lim\limits_{k \to \infty} k^{-p} \neq 0$, så serien kan ej konvergera i detta fallet.

■

10 Absolutkonvergens för serier

10.1 Definition

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sägs vara **absolutkonvergent** om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent.

10.2 Definition

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, men inte absolutkonvergent, sägs serien vara **betingat konvergent**.

10.3 Sats

Om $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Det vill säga absolutkonvergens $\implies$ konvergens.

10.4 Bevis:

Vi skriver om serien som en differens mellan två konvergenta positiva serier. Vi har att $a_k = |a_k| - (|a_k| - a_k)$, så

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k).$$

Den första serien i högerledet är konvergent enligt antagandet. För den andra serien har vi att $|a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, så jämförelsekriteriet (sats 6) get att även denna är konvergent.

$\blacksquare$

11 Om $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergent, så $a_k \to 0$ då $k \to \infty$

11.1 Sats

Om serien $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ är konvergent, så gäller det att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

11.2 Bevis:

Vi vet att följden $S_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + ... + a_k$ av partialsummor har ett gränsvärde S, när $k \to \infty$. Följden S_{k-1} har då samma gränsvärde S. Vi har att

$$a_k = S_k - S_{k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0.$$

$\blacksquare$

12 Tayloruvecklingen av en funktion $f(t)$

12.1 Sats

Om $f^{(n+1)}(t)$ existerar för alla t i ett intervall som innehåller a och x, är Taylorpolynomet av grad n till f kring a:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Här är felet $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ givet av någon av följande formler:

$$\begin{aligned} &\textbf{Lagranges restterm} \qquad && R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \ s \in [a,x] \\ &\textbf{Integral-restterm} \qquad && R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Den resulterande formeln

$$P_n(x) + R_n(x)$$

kallas för Taylorutvecklingen av f.