

Lösningförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 2010405, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = [\sqrt{x^2-1}]_1^{\sqrt{5}} = 2 - 0 = 2.$$

(b)

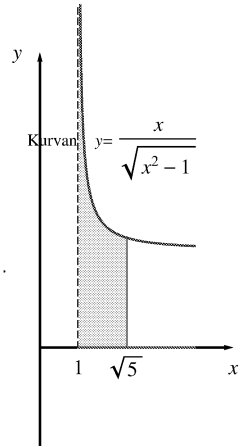
$$\int_0^\pi 3 \cos^2 t dt = 3 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 3 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^\pi = 3 \left(\frac{\pi - 0}{2} + \frac{0 - 0}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

(c)

Polynomdivision och PBU: $\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x} = 3 - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x}$

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x} dx = \int \left(3 - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x} \right) dx = 3x - 4 \ln|x+1| + 2 \ln|x| + C.$$

(d) Integralen i (a) är generaliserad eftersom integranden $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow 1+$.



2. Lös differentialekvationerna...

(a) Separabel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx \Leftrightarrow \arctan y = x + C \Rightarrow y = \tan(x + C).$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger att $1 = \tan C$, så att ex.vis är $C = n\pi + \frac{\pi}{4}$, n heltal, så att $y = \tan(x + n\pi + \pi/4) = \tan(x + \pi/4)$.

(b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, Karakteristisk ekvation $r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm i$, så att $y = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$. $y(0) = 0$ ger att $0 = A$, d.v.s. $y = B e^{-2t} \sin t$. Detta ger att

$$y' = B e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t) \text{ och } y'(0) = B = 2. \text{ Svar } y = 2 e^{-t} \sin t.$$

(c) Linj. DE av ordning 1 med icke-konstanta koeff. och löses med I.F.

$$t y' + 2y = \frac{e^{2t}}{t} \Leftrightarrow y' + \frac{2}{t} y = \frac{e^{2t}}{t^2}. \text{ I.F. } = e^{2 \ln t} = t^2.$$

$$t^2 \left(y' + \frac{2}{t} y \right) = t^2 y' + 2ty = (t^2 y)' = t^2 \cdot \frac{e^{2t}}{t^2} = e^{2t} \Leftrightarrow t^2 y = \frac{1}{2} e^{2t} + C \Leftrightarrow y = \frac{e^{2t} + C_1}{2t^2}$$

3. Givet funktionen $h(x) := \tan^2 x (e^{2x} - 1)$.

(a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x) = f(x)g(x)$ av grad 3... $f(x) = \tan^2 x$ är en jämn funktion, så att $f(x)$ har bara jämna potenser i sina Maclaurinpolynom.

$$f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f(0) = 0, f'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x), f'(0) = 0, f''(x) = 2 (\tan^2 x + 1) (3 \tan^2 x + 1)$$

så att $f''(0) = 2$ och $f'''(0) = 0$ eftersom $f(x)$ är jämn.

$$g(x) = e^{2x} - 1, g(0) = 0, g'(x) = 2e^{2x}, g'(0) = 2$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots)(g'(0)x + \dots) = f''(0)g'(0) \frac{x^3}{2} + \dots = 2x^3 + \dots$$

Därmed är polynomet $2x^3$.

(b) Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3}$ är alltså

$$\frac{h(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + \dots}{x^3} = 2 + \dots \rightarrow 2 \text{ då } x \rightarrow 0.$$

4. (Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \sqrt{k}}{(k+1)^2}$ är divergent eftersom termerna $a_k = \frac{2k \sqrt{k}}{(k+1)^2} \geq 0$ och har "gradskillnaden" mellan nämnare och täljare som är $2 - 3/2 = 1/2 \leq 1$.

(b)

$$\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

och summan är en teleskopsumma.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1} = 1.$$

(c) Konvergent geometrisk serie $S = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{e^2}{10}\right)^j$ eftersom $|x| = \left|-\frac{e^2}{10}\right| < \frac{3^2}{10} < 1$.

$$S = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-e^2}{10}\right)^j = -\frac{1}{1 - (-e^2/10)} = -\frac{10}{e^2 + 10}$$

5. Givet funktionen $f(x) = \ln x$, $0 < x \leq 1$ och området i planet, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$, se figur.

Volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring

(a) x -axeln:

$$V_x := \pi \int_0^1 \ln^2 x \, dx = \pi [x \ln^2 x]_0^1 - \int_0^1 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = -2\pi \int_0^1 \ln x \, dx = -2\pi [x \ln x - x]_0^1 = 2\pi.$$

(b) y -axeln:

$$V_y := -2\pi \int_0^1 x \ln x \, dx = -2\pi \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = 0 + 2\pi \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(c) $A := \int_0^1 2\pi x \sqrt{(1/x)^2 + 1} \, dx$.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1 + (1/x)^2} \, dx &= \int \sqrt{1 + x^2} \, dx = x \sqrt{1 + x^2} - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1 + x^2} - \int \sqrt{1 + x^2} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \int \sqrt{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})) + C \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A = \int_0^1 2\pi x \sqrt{(1/x)^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})]_0^1 = \pi[\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2})]$$

6. (a)

$$\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx \text{ där } F'(x) = f(x).$$

(b) $F'(x) \equiv f(x)$ och $g'(x)$ kontinuerliga.

(c)

$$DVL = f(x)g(x), \quad DHL = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x)$$

d.v.s. derivatorna av VL och HL är lika. Alltså är VL = HL.

7. (a) För integranden gäller att

$$0 \leq \frac{1}{x \sqrt{x^3 + 1}} \leq \frac{1}{x^{1+3/2}} = \frac{1}{x^{5/2}}, \quad 5/2 = \alpha > 1 \text{ och } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5/2}} \text{ konvergent.}$$

Enligt Jämförelsekriteriet är den ursprungliga integralen också konvergent.

(b)

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{x^3 + 1}} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{V.S. } t = \sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow x = (t^2 - 1)^{1/3} \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{3} (t^2 - 1)^{-2/3} 2t \, dt = \frac{2}{3} \frac{t}{x^2} \, dt \\ x - \text{gränser: } 1, \quad \infty \\ x - \text{gränser: } \sqrt{2}, \quad \infty \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{t}{x^2} \, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{dt}{t^2 - 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[\ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{\sqrt{2}}^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[\ln \left(\frac{1-1/b}{1+1/b} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right] = \frac{2}{3} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$