Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20131218, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{(x/4)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\arctan(x/4)+C$$

   (b)
$$\int_0^3 \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right]_0^3 = \ln 2\,.$$

   (c)
$$\int \tan^2 x\,dx = \left\{D(\tan x) = 1+\tan^2 x\right\} = \int (1+\tan^2 x - 1)dx = \tan x - x + C\,.$$

8p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$y' = 2x\,(y^2+1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+1} = 2x\,dx \Leftrightarrow \arctan y = x^2 + C$$

$\Longrightarrow y = \tan(x^2+C)$, $\quad y(0)=0$ ger att $0=\tan(\pi+C)$ s? att $C=0$, exempelvis.

$y = \tan(x^2)\,.$

   (b)
$$4y''(t)+y(t) = 2e^{t/2}$$

$y_h = A\cos(t/2)+B\sin(t/2)$

$y_p = CE^{t/2}$ insatt i DE:n ger $Ce^{t/2}(4/4+1)) = 2e^{t/2} \Leftrightarrow C=1$ .Svar $y = A\cos(t/2)+B\sin(t/2)+e^{t/2}$.

   (c)

$ty'(t)-2y(t) = 2t^3\,\cos t \Leftrightarrow y' - \dfrac{2}{t}\,y = 2t^2\cos t$, IF $= e^{2-\ln t} = t^{-2} \Rightarrow$

$\left(y\cdot t^{-2}\right)' = 2\cos t \Leftrightarrow y\cdot t^{-2} = 2(\sin t + C) \Leftrightarrow y = t^2(\sin t + C)\,.$

$y(\pi)=0 \Rightarrow 0 = 2\pi^2(\cdot 0 + C) \Leftrightarrow C=0$. Svar: $y = 2t^2\sin t,$.

3. Givet funktionen $h(x) := \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(x^2+1\right)$.

   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3, d.v.s. $h(x) = p_3(x)+R_3(x)$, där $p_3(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 3 och med resttermen $R_3(x)$ på Ordoform...

$h(x) = \left(e^{2x}-1\right)\ln\left(x^2+1\right) = (1+2x+2x^2-1...)(x^2-x^4/2+...) =$

$2x^3+\mathcal{O}(x^4)$

   (b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3} = 2\,.$$

6p

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+4k+3}$: Enligt uppgift (1b) ?r $\dfrac{1}{k^2+4k+3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)$, så att en partialsumma ?r

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\right.$$

$$\left.\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+2}+\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+3}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}\,.\text{ då } n\to\infty\,.$$

(b) Sätt $a_k = \dfrac{k+1}{k^{3/2}}$ och $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Då är

$$a_k \geq b_k > 0 \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}} \text{ divertgent.}$$

Svar (b). Serien är divergent.

5p

5. Givet funktionen $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ och omr?det i planet, som begr?nsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = \sqrt{2}$, se figur.

(a) Beräkna volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring $y-$axeln...

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi\,.$$

(b) Kurvan $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, d?r $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, roterar kring $y-$axeln och genererar en yta. Ytans area är

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{2\pi}{3}\,\left(1+x^2\right)_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)\,.$$

6p

6. (a) Ge en formel för partiell integration av produkten $f(x) \cdot g(x)$...

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

(b) Lämpliga villkor på $f(x)$ är att $f(x)$ är kontinuerlig och på $g(x)$ är att $g'(x)$ är kontinuerlig.

5p

7. Beräkna integralen...

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \left\{ \begin{array}{lll} 1+e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t-1) & \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t-1} \\ x-\text{granser} & 0, \quad \infty \\ t-\text{granser} & 2, \quad \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{dt}{t(t-1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{2}\int_2^{\infty}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{b-1}{b}\right) - \ln\left(\frac{2-1}{2}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty}\left[\ln(1-1/b) + \ln 2\right]\right) = \ln 2\,.$$

5p

8. Givet serien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(2x)^{k-1}$ ...

(a)

$$\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{k\,2^{k-1}}{(k+1)2^k} = \frac{1}{1+1/k}\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} =: R \text{ då } k \to \infty\,.$$

Alltså abolutkonvergent för $x\,:\; |x| < 1/2$ och divergent för $|x| > 1/2$. För $x = \pm 1/2$ får vi termer $k\,(\pm 1)^{k-1} \not\to 0$. Alltså divergent.

(b) Seriens summa: En primitiv funktion till $f(x)$ är

$$F(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

så att

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}\,.$$

7p

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

N?gra Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}$$

I alla utvecklingarna ?r ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$