Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20140425, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\, dx = 0$$
   ty udda integrand och symmetriskt integrationsintervall.

   (b)
$$\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}\, dx = \{\text{P.I.}\} = \Big[-2(x-2)e^{-x/2}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\Big[-2xe^{-x/2}\Big]_0^b = \lim_{b\to\infty}\Big[-2xe^{-b/2}+0\Big] = 0\,.$$

   (c)
$$\int \tan^2 x\, dx = \int (1+\tan^2 x - 1)dx = \tan x - x + C\,.$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$xy' + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C+\ln x}$$
   Villkoret $y(1)=2$ ger $2 = \dfrac{1}{C+0} \Rightarrow C = 1/2$, så att
$$y = \frac{2}{1+2\ln x}\,.$$

   (b)
$$y''(t) - 4y(t) = 8t^2 \quad \begin{cases} y_h = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} \\ y_p = At^2 + Bt + C \end{cases} \quad y_p'' - 4y_p = 2A - 4(At^2+Bt+C) = 8t^2 \iff$$
$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 2A - 4C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases} \iff y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 2t^2 - 1\,.$$

   (c) $y'(t) + 2y(t) = 3e^{-2t}$, $\quad y(1) = 0$. I.F. är e^{2t}. Muliplikation av DE:n med denna ger
$$(e^{2t}\,y)' = 3 \Leftrightarrow e^{2t}y = 3t + C \Leftrightarrow y = (3t+C)e^{-2t}\,.$$
   Med $y(1)=0$ ger detta $(3+C)=0$, så att $y = (3t-3)e^{-2t}$.

9p

3. Givet funktionen $h(x) := \sin 2x\, \ln\big(4x^2+1\big)$.

   (a) Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3, ges av
$$h(x) = \sin 2x\, \ln\big(4x^2+1\big) = (2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots)\cdot(4x^2 - \frac{\big(4x^2\big)^2}{2!} + \ldots) = 8x^3 + \mathcal{O}(x^4)\,.$$

   (b) Gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{8x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}(8 + \mathcal{O}(x)) = 8$$

6p

4. (a) Beräkna summan av serien $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{18}{k^2+k-2}$...
$$18\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2+k-2} = \lim_{n\to\infty} 6\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$
$$= 6\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 6\cdot\frac{11}{6} = 11\,.$$

   (b) Summan av serien
$$\sum_{j=1}^\infty (-1)^j(-2/3)^j = \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{2}{3}\sum_{j=0}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} = 2\,.$$

   (c) Visa att $\dfrac{\pi}{2} \le \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} \le 1 + \frac{\pi}{2}$... En lämplig integraluppskattning är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$ där
$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} \text{ är en översumma och } \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} \text{ är en undersumma}\,.$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx < \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2}, \text{ och } \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^2} = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} < 1 + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
   eller
$$\frac{\pi}{2} < \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx < 1 + \frac{\pi}{2}\,.$$

8p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, t + \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

(a) Beräkna längden av kurvan...

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t + 1} = \sqrt{2(1+\cos t)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,\cos(t/2)\,.$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (1+\cos t)^2}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos(t/2)dt = 2\cdot 2\,[\sin(t/2)]_0^{\pi/2} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ l.e.}$$

(b) Beräkna områdets area A...

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b y\,dx = \int_{t=\pi/2}^0 (t+\sin t)(-\sin t)dt = \int_0^{\pi/2} (t\sin t + \frac{1-\cos 2t}{2})dt = \\ &= [t(-\cos t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{4} \text{ a.e.}\,. \end{aligned}$$

6p

6. (a) I integralen $\int f(x)dx$ görs variabelsubstitutionen $x = x(t)$, som ger

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

(b) Lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ i (a) är att $f(x)$ kontinuerlig och $x'(t)$ är kontinuerlig.

5p

7. Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$...

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \{(x+1)\sqrt{x^2-1} = (x+1)^{3/2}\,(x-1)^{1/2}\} = \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)^{3/2}\,(x-1)^{1/2}} =$$

$$\{(x-1)^{1/2} = t,\ x = t^2+1 \Rightarrow dx = 2t\,dt\} = \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{(t^2+2)^{3/2}\,t} = \int_0^\infty \frac{2\,dt}{(t^2+2)^{3/2}}$$

Vi börja med att beräkna

$$\int 1\cdot\frac{dt}{(t^2+2)} = \{\text{P.I.}\} = t\cdot\frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + \int t\cdot\frac{t}{(t^2+2)^{3/2}} =$$

$$= t\cdot\frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + \int\frac{t^2+2}{(t^2+2)^{3/2}} - \int\frac{2dt}{(t^2+2)^{3/2}} \Leftrightarrow t\cdot\frac{1}{(t^2+2)^{1/2}} + C = \int\frac{2dt}{(t^2+2)^{3/2}}.$$

Alltså är, med $t = \sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)^{3/2}\,(x-1)^{1/2}} = \left[\frac{t}{(t^2+2)^{1/2}}\right]_{x=1}^\infty = \left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right]_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1-1/b}}{\sqrt{1+1/b}} - \frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}}\right) = \mathbf{1}\,.$$

7p