Lösningsförslag till tentamen i matematisk analys TMV138/TMV181, 20170410, 14.00-18.00

1. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int_0^2 \frac{8}{x^2+4}\,dx = 8\int_0^2 \frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{(x/2)^2+1} = \{\text{V.S. } x/2 = t\} =$$
$$2\int_0^1 \frac{2dt}{t^2+1} = 4\left[\arctan 1 - \arctan 0\right] = \pi \text{ (Svar).}$$

   (b) Integrationsintervallet är symmetriskt och integranden är udda ty $\sin x$ är udda och 5 är en udda exponent. Alltså är
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x\,dx = 0.$$

   (c)
$$\int xe^{-x/2}\,dx = \{\text{P.I.}\} = x(-2)e^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}dx = (-2x-4)e^{-x/2} + C = C - 2(x+2)e^{-x/2} \text{ Svar).}$$

3p, 3p, 3p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$xy'(x) + y(x) = 1 \iff (xy)' = 1 \iff xy = x + C \iff y = 1 + \frac{C}{x}.$$
   Villkoret $y(2) = 1$ ger $C = 0$, så att $y \equiv 1$ (Svar).

   (b)
$$\iff 2y^2 = \frac{dy}{dx} \iff \frac{dy}{y^2} = 2 \iff -\frac{1}{y} = 2x - C \iff y = \frac{1}{C-2x}.$$
   Villkoret $y(0) = 1$ ger
$$1 = \frac{1}{C} \iff C = 1. \text{ Svar: } y = \frac{1}{1-2x}.$$

   (c)
$$\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) = \cos t \iff y' + y = \sin t + C_1 \\ y_h = C_2 e^{-t}, \quad y_{p_1} = C_3, \quad y_{p_2} = A\cos t + B\sin t \\ y'_{p_2} + y_{p_2} = (A+B)\cos t + (B-A)\sin t = \cos t \Rightarrow A = B = 1/2. \\ y_h = C_1 t + C_2 \\ \hline \\ \text{Svar: } y = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + C_1 t + C_2 \end{array}$$

3p, 3p, 3p

3. Funktionen $h(x) = \cos^2 x \cdot \arctan\left(x^2\right)$ är given.

   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 4 med resttermen på Ordoform:
$$(1 - x^2 + \mathcal{O}(x^3))^2(x^2 + \mathcal{O}(x^4)) =$$

4p

   (b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - x^2}{x^4}$ 1p

4. (a) Beräkna $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{6}{(k+1)(2k+4)}$... Uppdelning av allmän term m.h.a. PBU ger
$$\frac{6}{(k+1)(2k+4)} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k+2}$$
   så att $n:e$ partialsumman blir
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{6}{(k+1)(2k+4)} = 3\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right] = 3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] =$$
$$3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right] \longrightarrow 3\cdot\frac{1}{3} = 1 \text{ (svar).}$$

2p

   (b) Visa olikheten $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \geq \dfrac{\pi}{4}$...
$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^n \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} + \int_1^n \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$
   Låt $n \to \infty$. Då får vi
$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \iff \frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$
   (Lösningen är faktiskt trivial eftersom första termen i serien är 1 och $1 > \pi/4$.) 4p

(c) Motivera att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Och integralen är konvergent. 2p

5. Givet ytan som begränsas av $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, samt linjerna $x = 1$ och $x = e$.

(a) Volymen V_x som genereras då ytan, roterar kring $x-$axeln...

$$V_x = \pi \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \pi \left[\frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^e = \frac{\pi}{3}.$$

3p

(b) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring $y-$axeln med e...

$$V_y = 2\pi \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = 2\pi \left[\frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \ln x - \int \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \frac{dx}{x} \right]_1^e = \frac{4\pi}{9} \left(e\sqrt{e} + 2 \right)$$

3p

6. Ange för vilka x som följande serie är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent...
Vi har att termen $a_n := \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{2x}{3} \right)^n$ har belopp $|a_n| = \frac{|2x/3|^n}{n}$.
Vi får abs. konvergens om $|x| < 3/2$.
Vi får betingad konvergens om $x = 3/2$ och vi får divergens för övriga x.
För $x = 3/2$ blir serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n = -\ln 2.$$

6p

7. Givet funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ där f och g' är kontinuerliga och $F' = f$. DÂ gäller

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx.$$

6p
