TMV138 och TMV181 Föreläsning 1

Vi introducerar summsymbolen, bestämmer formler för några summor och detta speciellt för $S_2(n) := \sum_{j=1}^{n} j^2$.

1 Summaymbolen

1.1 Summasymbolen $\sum$

Ex 1 I summan $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ är $2, 3, 4$ och 5 *(sub-)index*. Övre index är 5 och dito undre är 2. Antal termer är $5 - 2 + 1 = 4$.

∎

Ex 2 Summan $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{j=2}^{5} a_j$.

5 är övre index,
2 är undre index och
j är löpande index.
a_j är summand.

Det löpande indexet j antar *alla heltalsvärden* fr.o.m. undre t.o.m. övre index. Detta index kan vara vilken bokstav som helst, som inte betyder något annat.

∎

Ex 3 (Förskjutning av index)

$$\sum_{j=2}^{5} a_j = \{\text{Sätt ex.vis } j = k + 1\} = \sum_{k=1}^{4} a_{k+1}.$$

∎

1.2 Några speciella summor

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ \underbrace{1+3+5+7+9}_{5 \text{ termer}} &= 5^2 \end{aligned}$$

Summan $1 + 3 + 5 + 7 = \sum_{k=1}^{4}(2k - 1)$. Vi kan skriva att udda (hel-)tal som $2k - 1$, där k är ett heltal.
Ex.vis är $-7 = 2 \cdot (-3) - 1$ och $11 = 2 \cdot 6 - 1$.

$$\boxed{\textbf{Sats:}\quad S(n) := 1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.}$$

Vi visar först att

$$S_1(n) := 1+2+.3..(n-2)+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2},\ n = 1,2,... \tag{1}$$

Knepet är (se även i boken avsnitt 5.5)

$$\begin{aligned} 2S_1(n) &= 1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n+ \\ & \quad n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 = \\ & \quad n\cdot(n+1) \\ &\iff \\ S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n. \end{aligned}$$

1.3 Linearitet hos $\sum$ −symbolen

Ex 4

$$c\sum_{j=2}^{5}a_j = c(a_2+a_3+a_4+a_5) = \sum_{j=1}^{n}c\,a_j$$

och

$$\sum_{j=2}^{5}(a_j+b_j) = (a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)+(a_5+b_5) = \sum_{j=2}^{5}a_j+\sum_{j=2}^{5}b_j.$$

Dessa två egenskaper gäller givetvis för alla tänkbara undre och övre index.

∎

Ex 5 Vi bevisar nu formeln för $S(n)$ m.h.a. (1).

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k+ = \sum_{k=1}^{n}(-1) = 2S_1(n)-n = \\ & \quad 2\cdot\frac{n^2+n}{2}-n = n^2. \end{aligned}$$

∎

Vi har har här som mål att ge en formel för $S_2(n) := \sum_{k=1}^{n}k^2$.

Ex 6 Vi visar först formeln för $S_1(n)$ igen men nu m.h.a. $S_2(n)$.

$$S_2(n) = \sum_{k=0}^{n}k^2$$

eftersom den första tillagda termen är $0^2 = 0$. Vi har då $n + 1$ termer i summan. Nu är

$$S_2(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \{j = k-1\} = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^2 = \{j = k\} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2.$$

Vi tar nu differensen mellan $S_2(n + 1)$ och $S_2(n)$: Den kan skrivas som VL respektive HL nedan.

$$(n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = \{j = k-1\} = \sum_{j=1}^{n+1} (2j-1)$$

vilket är formeln får $S(n+1)$, som här dyker upp som en biprodukt. Vi byter $n + 1$ till n och får

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2S_1(n) - n$$

eller ekvivalent

$$n^2 + n = 2S_1(n) \iff \frac{n^2+n}{2} = S_1(n).$$

■

1.3.1 Bevis av formel för $S_2(n)$

Vi börjar med $S_3(n)$ och $S_3(n-1)$ som i föegående bevis (En liten finess: Vi undviker att använda $S_3(n+1)$ för att inte få formeln för $S_2(n+1)$).

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \text{ och } S_3(n-1) = \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3.$$

$$S_3(n) - S_3(n-1) = n^3 = \sum_{k=1}^{n} \left[k^3 - (k-1)^3\right].$$

Nu är summanden

$$k^3 - (k-1)^3 = (k - (k-1))(k^2 + k(k-1) + (k-1)^2) = 1 \cdot (3k^2 - 3k + 1).$$

Vi får alltså likheten

$$\begin{aligned} n^3 &= 3s_2(n) - 3S_1(n) + n = 3S_2(n) - \frac{3}{2}n(n+1) + n \\ &\iff 3S_2(n) = \frac{1}{2}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) \\ &\iff S_2(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \{\text{även}\} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \{\text{samt}\} = \\ &\quad \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Man kan få (slutna) formler för alla summor $S_\alpha(n) := \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ för alla positiva heltal α.
- Man kan också bevisa att formeln för ex.vis $S_2(n)$ är sann med *Matematisk induktion.*
- Man kan med induktion bevisa att $s_\alpha(n)$ är ett polynom i variabeln n av grad $\alpha + 1$ med högstagradsterm $\dfrac{1}{\alpha+1}\, n^{\alpha+1}$ och nästhögstagradsterm $\dfrac{1}{2}\, n^\alpha$.

1.4 Geometrisk summa

$$G(n) := 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}$$

är en *geometrisk summa* med n termer. Det typiska för en sådan summa är att kvoten mellan två konsekutiva termer är konstant:

$$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x,\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Vi multiplicerar $G(n)$ med just x och får en liknande summa $x\,G(n) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$. Vi tar nu differensen

$$x\,G(n) - G(n) = x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n - (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = x^n - 1.$$

VL kan skrivas $(x-1)G(n)$. Omm $x \neq 1$ kan vi dividera med $x - 1$ i båda led och få

$$G(n) = \frac{x^n - 1}{x - 1}\,. \tag{2}$$

2 Beräkning av integral som gränsvärde av summa

Ex 7 Vi beräknar arean mellan $x-$axeln och kurvan $y = f(x) = x^2$, där $0 \le x \le 1$. En *undersumma* med $n = 3$ termer är ex.vis

$$U_3 := \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{k-1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^3} \cdot S_2(2).$$

där intervallet $[0, 1]$ har delats in i 3 lika långa delintervall, $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ och $[2/3, 1]$. P.s.s. bildar man en *översumma*

$$\ddot{O}_3 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{k}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^3} \cdot S_2(3).$$

Vi kan räkna ut dessa och de blir $\dfrac{5}{27}$ respektive $\dfrac{14}{27}$. En undersumma är en underskattning av en eventuell area och en översumma är en underskattning av denna area.

Ex 8 Vi delar in $[0,1]$ i n lika långa delintervall med längd $\Delta x = 1/n$. En undersumma är

$$U_n = \Delta x \sum_{k=1}^{n} f((k-1)/n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} S_2(n-1).$$

P.s.s. fås en översumma

$$\ddot{O}_n = \Delta x \sum_{k=1}^{n} f((k)/n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} S_2(n).$$

Genom att ta gränsvärdet $n \longrightarrow \infty$ av under- och översumma fås det gemensamma gränsvärdet $\frac{1}{3}$.

Kommentarer:

- Detta gemensamma värde $\frac{1}{3} =: \int_0^1 x^2 \, dx$.
- Man säger att $f(x) = x^2$ är integrerbar i Riemanns mening.
- En begränsad funktion definierad på ett kompakt intervall $[a,b]$ är integrerbar, om det finns precis ett tal I mellan alla under- och översummor.

$$I = \int_a^b f(x) \, dx. \tag{3}$$

Ex 9

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - j/n}$$

kan tolkas som en Riemannsumma me funktionen $f(x) = \sqrt{1-x}$. Om man ritar upp detta, ser man att det är en underssumma. Gränvärdet

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - j/n} = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}\,.$$