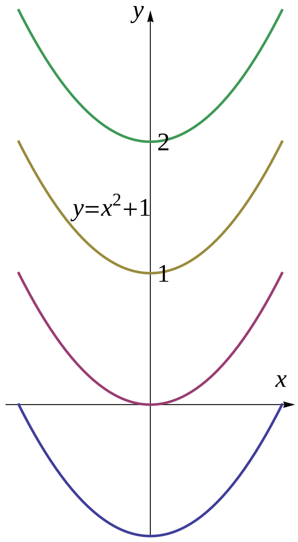
1 Föreläsning 10, differentialekvation (DE)

Linjär DE med konstanta koefficienter av ordning 1

Ex 1 För ekvationen $y' = 2x$ måste $y = x^2 + C$. Vi kan rita y för olika konstanter C.



Vi säger att $y = x^2 + C$ är lösningen på DE:n.

■

Ex 2 Betrakta DE:n $y'(x) = -2y(x)$. Den är av ordning 1, ty y' är den högsta derivatan. kan skrivas $y' + 2y = 0$ (där vi undertrycker den oberoende variabeln.) Den är linjär p.g.a. termerna är y' och y. En linjär DE klassificeras vidare.

- Den är homogen ty HL$= 0$.
- Den är har konstanta koefficienter 1 och 2.
- DE:n kan skrivas $\dfrac{dy}{dx} = -2y \overset{(\star)}{\iff} \dfrac{dy}{y} = -2dx$. Vi har därmed *separerat* variablerna y och x. DE:n är *separabel.*

Vi kan lösa integralen genom att separera variablerna.

$$\frac{dy}{y} = -2dx \iff \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \iff$$

$$\ln y = C - 2x \iff y = e^{C-2x} = e^C \cdot e^{-2x} = C_1 e^{-2x}\,.$$

Vi har egentligen ingen ekvivalens i $^{(\star)}$ eftersom fallet $y = y(x) \equiv 0$ inte kommer med p.g.a. vi diviverar med y. Detta fall skall också lösas. Vi ser att i den ursprungliga DE:n ger $y \equiv 0$ att $y' \equiv$, så att båda led blir 0. Alltså är $y \equiv 0$ också lösning på DE:n.
Vi observerar dock att, genom att välja $C_1 = 0$ i $y = C_1 e^{-2x}$, så att $y \equiv 0$ finns alltså med i den första lösningen ovan.

■

Kommentarer

- Lösningen $y \equiv 0$ kallas *singulär* lösning. Man får se till att få med en sådan lösning, då man löser en DE.

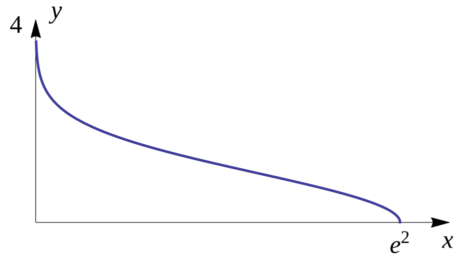
Ex 3 DE:n $y' \cdot y + 1/x = 0$, $y(1) = 2$ är inte linjär, p.g.a. termen $y' \cdot y$. Den måste vi lösa med variabelseparation.

$$y' \cdot y = -1/x \Longleftrightarrow ydy = -\frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \frac{y^2}{2} = C - \ln x \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{2}\sqrt{C - \ln x}\,.$$

Randvillkoret ger att $y(1) = 2$ att det endast är "+" som gäller d.v.s.

$$y = +\sqrt{2}\sqrt{C - \ln x}, \quad y(1) = 2 = \sqrt{2}\sqrt{C - \ln 1} \Rightarrow C = 2\,.$$

Alltså är $y = \sqrt{4 - 2\ln x}$.



Ex 4 DE:n $xy' + 2y = -2x$ är inhomogen, pg.s. HL och har icke-konstanta koefficienter (x). Den går inte att lösa med ovanstående metoder. I stället löses den med *integrerande faktor*, IF.

1. Dividera med x så att koefficienten framför y' blir 1, så att man får $y' + \frac{2}{x}\,y = -2$.
2. Beteckna koefficienten framför y med $f = f(x) = \dfrac{2}{x}$.
3. Bestäm en primitiv funktion $F(x) = 2\ln x$ till $f(x)$.
4. Den integrerande faktorn I.F. är $e^{F(x)} = e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2\,.$
5. Multiplicera DE:n $y' + \dfrac{2}{x}\,y = -2$ med I.F. Detta ger
$$x^2y' + 2xy = -2x^2.\ \text{ VL} = (x^2y)' \text{ och HL} = -2x^2\,.$$
6. Integrera båda led:
$$x^2y = -\int 2x^2dx = C - \frac{2x^3}{3} \Longleftrightarrow y = \frac{C}{x^2} - \frac{2x}{3}\,.$$

Ex 5 47 Lös DE:n $y'(t) + 2y(t) = 4t^2$

Lösning: Vi har redan löst $y'(t) + 2y(t) = 0$, som är en homogen DE. Den lösningen är $y = Ce^{-2t}$ enligt exempel 2.Man kallar denna lösningen för *homogenlösningen* y_h till DE:n $y'(t) + 2y(t) = 4t^2$. Den kommer att ingå som en term i lösningen till denna DE. Den andra termen svarar mot det speciella HL $4t^2$ och kallas *partikulärlösning* $(= y_p)$. Detta ansätter man med ett "matchande" uttryck. Eftersom HL är ett polynom av grad 2 bör $y_p = At^2 + Bt + C$. Insatt i DE:ns VL får vi

$$2At^2 + 2At + 2Bt + B + 2C = 4t^2\,.$$

Genom att identifiera koefficienterna med varandra, får vi

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = 1 \text{ d.v.s. } y_p = 2t^2 - 2t + 1\,.$$

Lösningen på DE:n är

$$y = y_h + y_p = Ce^{-2t} + 2t^2 - 2t + 1\,.$$

Kommentarer

- DE:n $y'(t) + 2y(t) = 0$ är linjär, homogen med konstanta koefficienter. Den har en lösning på formen $y = Ce^{rt}$, där någon konstant r. Genom att sätta in detta y i DE:n får vi

$$y'(t) + 2y(t) = Cre^{rt} + 2Ce^{rt} = Ce^{rt}(r+2) = 0\,.$$

  Om inte $C = 0$, så måste $r + 2 = 0$, som är DE:ns *karakteristiska ekvation*, med rot $r = -2$. Alltså är $y = Ce^{-2t}$.

- Man kan också lösa denna DE med I.F. Då får man att

$$\left(e^{2t} \cdot y\right)' = 4t^2 e^{2t} \Longleftrightarrow e^{2t} \cdot y = \int 4t^2 e^{2t} dtx = \{\text{P.I.}\} = (2t^2 - 2t + 1)e^{2t} + C$$

Linjär DE med konstanta koefficienter av ordning 2

Ex 6 48 DE:n $y'' - 4y = 0$ är en linjär, homogen, DE av *andra* ordningen med konstanta koefficienter. Vi utgår från att lösningen är termer på formen $y = Ce^{rx}$, (om nu y är en funktion av variabeln x). Karakteristisk ekvation är $r^2 - 4 = 0$ med rötter $r = \pm 2$. Lösningen till DE:n är $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

∎

Ex 7 49 DE:n $y'' + 4y = 0$ är linjär och homogen med konstanta koefficienter. Karakteristisk ekvation är $r^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow r = \pm 2i$. Så att

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} = C_1(\cos 2x + i \sin 2x) + C_2(\cos 2x - i \sin 2x) = \\ &= (C_1 + C_2)\cos 2x + i(C_2 - C_2)\sin 2x = A\cos 2x + B \sin 2x\,. \end{aligned}$$

∎

Ex 8 50 De:n $y'' + 4y = 8e^{2x}$ har en lösning y som kan delas upp i en homogen- och en partikulärlösning. $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$ och y_p ansätter vi som $y_p = Ce^{2x}$. Däär blir $y_p'' = 4Ce^{2x}$. Insatt i DE:n ger detta

$$y_p'' + 4y_p = 4Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = 8Ce^{2x} = 8e^{2x} \Longleftrightarrow C = 1\,.$$

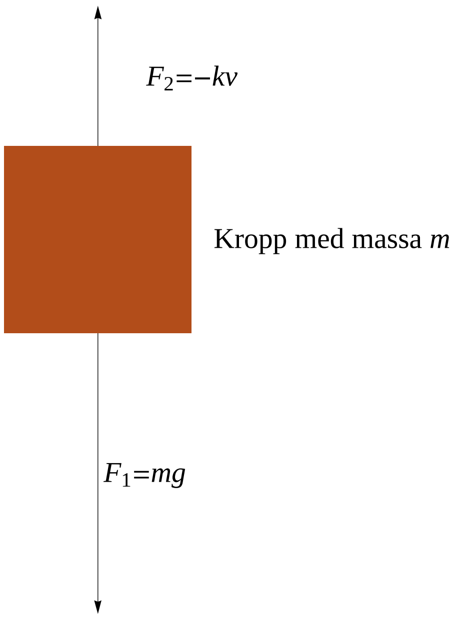
Lösningen på DE:n är därmed

$$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + e^{2x}\,.$$

∎

En tillämpning, fritt fall

Ex 9 51 En fallande kropp med massa m, i vårt gravitationsfält påverkas av dels gravitationskraften $mg =: F_1$ och luftmotståndet F_2. Vi antar att den har hastigheten 0 vid tiden $t = 0$. Vi antar att detta är proportionellt mot hastigheten v. D.v.s. $F_2 = -k\,v$ för en proportionalitetskonstant $k > 0$ med positiv referensriktning nedåt.



Den totala kraften F som påverkar kroppen är då $F_1 - F_2 = F = \{\text{enl. Newtons kraftekvation}\} = ma$, där a är kroppens acceleration. Vi får alltså

$$F_1 + F_2 = mg - kv = ma \Longleftrightarrow ma + kv = mg\,.$$

Eftersom $a = v' = v'(t)$ är detta en linjär DE , inhomogen av första ordningen med konstanta koefficienter, som kan skrivas

$$mv' + kv = mg, \quad v(0) = 0\,.$$

Den kan faktiskt lösas med variabelseperation (P.g.a. att HL är en konstant, d.v.s. oberoende av tiden t).

$$mv' + kv = mg \Longleftrightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Longleftrightarrow dt =$$

$$\frac{mdv}{mg - kv} = -\frac{mdv}{kv - mg} \Longleftrightarrow t + C = -\frac{m}{k}\ln|kv - mg| \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{k}{m}t + C_1 = \ln|kv - mg| = \ln(mg - kv) \text{ eftersom } v(0) = 0.$$

Vi tar e upphöjt till båda led.

$$e^{C_1}e^{-kt/m} = C_2e^{-kt/m} = mg - kv \Longleftrightarrow v = \frac{mg - C_2e^{-kt/m}}{k}\,.$$

Nu är $v(0) = 0$. Detta ger att

$$0 = \frac{mg - C_2}{k} \Longleftrightarrow C_2 = mg \text{ så att } v = \frac{mg}{k}\cdot(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Vissa nödvändiga egenskaper för denna lösning

Vi ser speciellt att $v(0) = 0$, vilket stämmer med begynnelsevillkoret.
Vad händer då t blir stort, d.v.s. $t \to \infty$? Då får vi gränsvärdet(gränshastigheten) $\lim\limits_{t\to\infty} v = \frac{mg}{k}$. Alltså, i praktiken en sluthastighet som därmed är $v_1 := \frac{mg}{k}$. Den beror på kroppens massa och planeten jordens tyngdacceleration, samt på "luftmotståndskoefficienten" k. Ju större den är desto lägre sluthastighet.
Accelerationen är (per definition)

$$a(t) \equiv v'(t) = \frac{dv}{dt} = \{\text{i detta fall}\} = \frac{d}{dt}\frac{mg}{k}\cdot(1 - e^{-kt/m}) =$$

$$= \frac{mg}{k}(0 - \left(-\frac{k}{m}\cdot e^{-kt/m}\right)) = ge^{-kt/m}\,.$$

Speciellt är $v'(0) = a(0) = g$, d.v.s. vid tiden $t = 0$ har man accelerationen g, vilket är naturligt.
Vad blir accelerationen $a(t)$, då t ökar? Vi låter $t \to \infty$. Då får vi gränsvärdet $a = 0$, d.v.s. kroppens acceleration går mot noll. I praktiken uppnår kroppen ganska snart en konstant hastighet och accelerationen blir (därmed) 0.

$\blacksquare$