Föreläsning 11 Inhomogen Linjär DE av andra ordningen

Inhomogen Linjär DE av andra ordningen

Ex 1 Lös DE:n

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 5e^{-t} + 6\sin(t), \\ \\ y(0) = 5, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Lösning: $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$. Vi har två olika typer av termer i HL, så vi tera fram två olika partikulärlösningar.

$$y_{p_1} = Ae^{-t}, \quad \text{och } y_{p_2} = B\cos t + C\sin t\,.$$

Dessa sättes in en och en i DE:n med motsvarande HL.

$$y''_{p_1}(t) + 4y_{p_1}(t) = Ae^{-t} + 4Ae^{-t} = 5e^{-t} \Rightarrow A = 1\,.$$

$$y''_{p_2}(t) + 4y_{p_2}(t) = -B\cos t - C\sin t + 4(B\cos t + C\sin t) = 6\sin t \Longleftrightarrow A = 0, \quad B = 2\,.$$

Alltså är $y(t) = e^{-t} + 2\sin t + A\cos 2t + B\sin 2t$. Vi har nu två begynnelsevillkor (eller randvillkor), som är

$$5 = y(0) = 1 + A \Longleftrightarrow A = 4$$

och

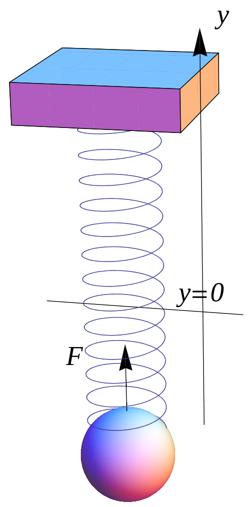
$$-1 = y'(0) = -1 + 2 - 2A\cdot 0 + 2B\cdot 1 \Longleftrightarrow -2 = 2B \Longleftrightarrow B = -1\,.$$

Svar: $y(t) = e^{-t} + 2\sin t + 4\cos 2t - \sin 2t\,.$

Kommentarer

- Observera att konstanterna A, B och C används i olika betydelser.
- Vi ansätter alltså $y_{p_2} = B\cos t + C\sin t$, även om det bara är en $\sin -$term i HL.

Ex 2



En fjäder är belastad med en vikt (kula) med massa m. Kulna och fjädern sätts i gungning i lodrät ledd kring jämviktsläget $y = 0$. Krafterna som påverkar fjädern är $-k \cdot y$, där $k > 0$ är fjäderkonstanten. Newtons kraftekvation ger $ma = -ky \iff m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot y = 0$, en linjär DE av ordning 2 med konstanta koefficienter. Den är dessutom homogen (Inga utifrån verkande krafter). Denna DE har lösningen $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, där $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$, d.v.s. utslaget 0 vid tiden $t = 0$ blir $A = 0$. så att

$$y = B\sin\omega t\,.$$

Ex 3 Lös DE:n $y'' + y = \sin t$, $y = y(t)$.

Lösning: Vi ser att HL ingår i y_h. Vi inför därför $z = x + iy$, $x = x(t)$ är en reell funktion. Motsvarande HL är $e^{it} = \cos t + i\sin t$. Då är $y = \text{Im}\, z$. Vi sätter $z = e^{it}u$, där $u = u(t)$ är en ny funktion.

$$z' = e^{it}(u' + iu), \quad z'' = e^{it}(u'' + 2iu' - u).$$

Insatt i DE:n ger detta

$$e^{it}(u'' + 2iu' - u + u) = e^{it} \iff u'' + 2iu' = 1 \iff u' + 2iu = t + C_1$$

Denna sista DE läser vi med IF$= e^{2it}$. Det ger

$$\begin{aligned} u &= e^{-2it}\int e^{2it}(t + C_1)dt = e^{-2it}\left[-\frac{i}{2}e^{2it}(t + C_1) + \frac{i}{2}\int e^{2it}dt\right] \\ &= -\frac{i}{2}t + C_3 - \frac{1}{4} + C_2e^{-2it} \end{aligned}$$

Alltså är

$$z = e^{it}u = -\frac{i}{2}(\cos t + i\sin t) + \left(C_3 - \frac{1}{4}\right)(\cos t + i\sin t) + C_2(\cos t - i\sin t).$$

Slutligen är

$$y = \text{Im}\, z = -\frac{t}{2}\cos t + A\cos t + B\sin t\,(\text{Svar}).$$