red

1 Föreläsning 12, Taylors formel, och att approximera en funktion med ett polynom

1.1 Taylorpolynom

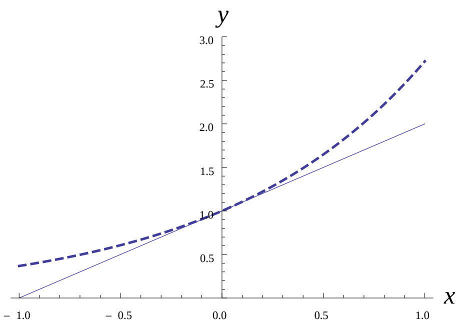
1.2 Fakultet

$0! = 1$, (läses ”noll-fakultet”). $1! = 1$. Vidare är $2! = 1 \cdot 2 = 2$ och $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Allmänt fˆr $n = 1, 1, 2, ..., n! = 1 \cdot 2 \cdot 2... \cdot (n-1) \cdot n$. Ex.vis är $52! \approx 10^{67}$ antalet ordningar som korten i en kortlek med 52 kort kan ligga. Speciellt är $\dfrac{(k-1)!}{k!} = \dfrac{1}{k}$.

Några funktioners kurvor och dito Taylorpolynom

Ex 1

- Vi ritar funktionen $y = f(x) = e^x$ och $y = 1 + x$ där $x \approx 0$.
- Vi ser att kurva och linje approximativt är lika då x nära 0 och exakt lika i $x = 0$.
- Genom att även rita kurvan $y = 1+x+x^2/2$, får vi en ännu bättre överensstämmelse mellan funktionskruva $y = f(x)$ och polynomkurvan.
-



Kurvan $y = f(x) = e^x$ och kurvan $y = x + 1$, då $x \approx 0$

Hur man bestämmer ett sådant polynom

Ex 2 I den sista figuren kallar vi polynomet $p_2(x)$. Vi ser att $f(x)$ och $p_2(x)$ sammanfaller i $x = 0$, d.v.s. $f(0) = p_2(0)$. Likaså är $f'(0) = p_2'(0)$. I detta exempel är $x = 0$ den punkt som vi identifierar funktion och polynom. Polynomet är ett *Maclaurinpolynom* ty (*utveckling* kring $x_0 = a = 0$), ett specialfall av ett

Taylorpolynom (*utveckling* kring x_0.) Vi Taylorutvecklar

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \{\text{P.I.}\} = f_0(x) + \left[(t-x)f'(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)dt = \\
&= \{\text{P.I.}\} = f_0(x) + (x-x_0)f'(x_0) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f''(t)dt = \\
&= f_0(x) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f''(t)dt = \{\text{P.I.}\} = \\
&= f_0(x) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \left[\frac{(t-x)^3}{2\cdot 3}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^3}{2\cdot 3} f^{(4)}(t)dt = \\
&= f_0(x) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{2\cdot 3} f'''(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^3}{2\cdot 3} f^{(4)}(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Vi får för en funktion $f(x)$ som är $n+1$ ggr kontinuerligt deriverbar att

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)}{0!} + f'(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^1}{1!} + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + ...+ \\
&+ f^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} + (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \\
&= p_n(x) + R_n(x)\,.
\end{aligned}$$

■

Ex 3 Vi skall bestämma Maclaurinpolynomet för $f(x) = e^x$ av grad n. $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$. Alltså är Maclaurinpolynomet

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Man kan få en bra numerisk uppskattning av e. Sätt $x = 1$ och $n = 2$. Detta ger $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ och $p_2(1) = 2.5$. P.s.s. är $p_4(1) \approx 2.70833$, $p_6(1) \approx 2.71806$. De första 100 siffrorna i decimalutvecklingen av e är

$$\begin{aligned}
e = {} & 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966 \\
& 96762772407663035354759457138217852516642 7...
\end{aligned}$$

■

1.3 Taylor- och Maclaurinserie

En ”oändlig” summa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k =: \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

kallas *serie*. När det är Taylor- (resp. Maclaurin)polynom där antal termer $\longrightarrow \infty$ talar man om *Taylor*- respektive *Maclaurinserie*. Vi har att *Maclaurinserien* för $f(x) = e^x$ är

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,. \qquad (1)$$

Ex 4 Vi byter x mot ix i (1). Vi får då

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = 1 - + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right)$$

Detta ger alltså Maclaurinserierna fˆr $\cos x$ och $\sin x$ (Identifiera realdelarna med varandra och p.s.s. med imaginärdelarna.)

Ex 5

a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1, 2 och 3 av $f(x) = 2x^3 - 2x + 3$ i $x = x_0 = 1$.

Lösning:

$$f(x) = 2x^3 - 2x + 3, \quad f'(x) = 6x^2 - 2, \quad f''(x) = 12x, \quad f^{(3)}(x) = 12\,,$$

så att

$$f(1) = 3, \quad f'(1) = 4, \quad f''(1) = 12, \quad f^{(3)}(1) = 12\,.$$

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 3 \\
p_1(x) &= p_0(x) + 4(x-1) = -1 + 4x \\
p_2(x) &= p_1(x) + 12 \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} = -1 + 4x + 12x^2/2 - 12x + 6 = 5 - 8x + 6x^2 \\
p_3(x) &= 3 - 2x + 2x^3
\end{aligned}$$

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av $e^{2x} \cdot \cos x$ av grad 3.

Lösning: Det gäller att utveckla de två faktorerna tillräckligt långt.

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ... \text{ och } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Detta ger

$$e^{2x} \cos x = (1+2x+2x^2+4x^3/3+...)(1-x^2/2+x^4/24+...) = 1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$$

Svar: $1 + 2x + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

c) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 e^{\sin x}\,dx$, genom att integrera motsvarande Maclaurinpolynom av grad 3.

Lösning:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + (\sin x) + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + ... \approx \\
&\approx 1 + (x - x^3/6) + \frac{1}{2}\left(x - x^3/6\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - x^3/6\right)^3 + ... = \\
&\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$p_3(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \Rightarrow \int_0^1 p_3(x)dx = ... = \frac{5}{3} \approx 1.67\,.$$

En numerisk beräkning ger 1.63187.

Fler Maclaurinserier

Ex 6 Den geometriska serien är

$$a+ax+ax^2+ax^3+... = a(1+x+x^2+x^3+...) = a\cdot\frac{1}{1-x}, \text{ om } |x|<1\,. \quad (2)$$

Vi kan modifiera den. Först sätter vi $a=1$ och sedan byter vi x mot $-x$ och får

$$1-x+x^2-x^3+... = \frac{1}{1+x}, \quad |x|<1\,.$$

Om vi integrerar denna serie pÂ intervallet $[0,x]$ (och samtidigt byter x mot t som integrationsvariabel), och om termvis integration är tillåten, får vi

$$\ln(x+1) = x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\,,$$

som är Maclaurinserien för $\ln(x+1)$. Vi skall senare visa att den är konvergent för $|x|<1$. P.s.s. kan vi byta x mot $-x^2$ i (2) och få

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\,,$$

som vi integerar på intervallet $[0,x]$. Detta ger

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

Man kan visa att HL är konvergent om $|x|<1$.

▬

Ex 7 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\arctan^2 x}$$

Man kan lˆsa gränsvärdet ovan m.h.a. Taylorutveckling, eller med *Taylorserie*. I detta fall beräknar vi serien i $x_0=0$, d.v.s. en *Maclaurinserie*. Täljaren är

$$x\sin x = x(x-x^3/3!+x^5/5!+...)$$

och nämnaren är

$$\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right)^2$$

sÂ att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x(x-x^3/3!+x^5/5!+...}{\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right)^2}\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{1+\text{termer av högre grad}}{1+\text{termer av högre grad}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1\,.$$

▬

Lite knep för att bestämma Taylorutveckling m.m.

1. För funktionen $f(x) = \cos^2 x$, kan man utnyttja omskrivningen $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ och sedan utnyttja att

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...$$

Ex.vis är Maclaurinpolynomet av $\cos^2 x$ av grad 3 lika med

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}\right) = 1-x^2\,.$$

2. För den sammansatta funktionen $e^{\cos x}$ kan Maclaurinpolynomet av grad 4 tas fram genom att se att $x = 0$ ger $\cos x = \cos 0 = 1$. Där skall den yttre funktionen e^z med $z = \cos x$ utvecklas i $z = 1$. Vi vill dock utnyttja att vi känner Maclaurinpolynomen för e^z. Därför skriver vi om funktionen som

$$e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = e \cdot e^{\cos x - 1}$$

och nu är den inre funktionen $z = \cos x - 1$, som är noll om $x = 0$. Därför kan vi utveckla $e^{\cos x - 1} = e^z$ i $x_0 = 0$. Den inre funktionen $z = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ...$ Fortsättningen blir

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1} = e \cdot e^z = e(1 + z + z^2/2! + z^3/3! + ...) = \\ &= e(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} -\right)^3 + ...) = \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4\left[\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right] + ...\right) = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + ...\right) \end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet av grad 4 av funktionen $e^{\cos x}$ är alltså $e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6}\right)$ (Svar).

3. Man brukar säga att allt som liknar ett Taylorpolynom också är ett Taylorpolynom.

Ex 8 Rörelseenergi enligt Einstein och enligt Newton.

Enligt Newton	$W_{k,N} = \dfrac{1}{2} m v_0^2$
Enligt Einstein	$W_{k,E} = mc^2 - m_0 c^2$
där	$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$

m_0 kalla vilomassa och m kallas relativistisk massa.
Vi bestämmer Maclaurinpolynomet av $\dfrac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ och sätter $(v/c)^2 =: x$. Vu utvecklar funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} : \ f(0) = 1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \cdot (-1) \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Alltså är $p_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x$. Det ger att för låg hastighet $v << c$, alltså $|x|$ litet, är

$$W_{k,E} \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2}(v/c)^2\right) c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0\, v^2 = W_{k,N}.$$

∎