1 Föreläsning 13

Vi kommer nu att skriva om resttermen och använda Taylor- (fr.a. Maclaurin-) utveckling för att beräkna gränsvärde av typ ”$\frac{0}{0}$”.

1.1 Omskrivning av resttermen

$$R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Medelvärdessats

Vi har sedan tidigare visat att det finns ett $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

för en kontinuerlig funktion f på intervallet $[a, b]$.

En medelvärdessats till

Antag att f och g är koninuerliga på $[a, b]$ och att g *inte växlar tecken* i intervallet. Då finns $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Funktionen $g(t) := (t-x)^n$ ändrar inte tecken i intervallet $\{t; x_0 \le t \le x\}$. Vi antar att $f^{(n+1)}(t)$ är kontinuerlig i samma intervall. Alltså kan resttermen skrivas

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= (-1)^n f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt \\
&= (-1)^n f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \left[-\frac{(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right] f^{(n+1)}(\xi) \\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)
\end{aligned}$$

1.2 Ordobegreppet

För att beräkna ett gränsvärde då $x \longrightarrow x_0$, har man ibland en täljare och nämnare, vilka båda $\to 0$, då $x \to x_0$. Vi kommer främst ha $x_0 = 0$.

Ex 1 Vi kan ex.vis utveckla

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos\xi$$

ty med $f(x) = \sin x$ är $f^{(5)}(x) = \sin x$. Vi har att resttermen kan skrivas $x^5 \cdot B(x)$, där $B(x) = \frac{\sin\xi}{5!}$, en begränsad funktion av x (ξ beror ju på x). Vi beräknar gränsvärdet då $x \to 0$ av

$$\frac{\sin x - x}{2x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + x^5 B(x)}{2x^3} = \frac{\frac{1}{3!} + x^2 B(x)}{2} \longrightarrow \frac{1}{12} \text{ då } x \to 0.$$

∎

Kommentarer

- Vi ser att det är ointressanat att veta mer om $B(x)$ än att det är en *begränsasd* funktion då x nära $x_0 (= 0)$.

Definition Ett uttryck som $x^k\, B(x)$, där $B(x)$ begränsad, skrivs $\mathcal{O}(x^k)$ och kallas (stora) ordo x^k, $k = 0, 1, 2, ...$

- Vad gäller för räkneregler för $\mathcal{O}(x^k)$?
  - Vi låter $B_j(x)$, $j = 1, 2, ..$ beteckan begränsade funktioner och adderar

$$\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) = x^2 B_1 + x^3 B_2 = x^2 (\underbrace{B_1 + x B_2}_{\text{Begr. funktion}}) = \mathcal{O}(x^2).$$

  - $\mathcal{O}(x^3)$ är också $\mathcal{O}(x^2)$ (men inte omvänt).
  - Multiplikation:

$$\mathcal{O}(x^2) \cdot \mathcal{O}(x^3) = x^2 B_1 \cdot x^3 B_2 = x^5 B = \mathcal{O}(x^5).$$

    Och speciellt

$$\Big(\mathcal{O}(x^k)\Big)^2 = (x^k B)^2 = x^{2k} B^2 = \mathcal{O}(x^{2k})$$

  -

$$\mathcal{O}(x^m) \cdot x^n = \mathcal{O}(x^{m+n}), \quad \frac{\mathcal{O}(x^m)}{x^n} = \mathcal{O}(x^{m-n})$$

- Resttermen $R_n(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$.

Ex 2 Existerar gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\tan x}$?

Lösning:

Både täljare och nämnare $\to 0$, då $x \to 0$. Frågan är vilken av dessa som är "mest 0" då $x \to 0$.

- Täljarens Maclaurinutveckling är, ex.vis

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6) - 1.$$

- Nämnaren kan skrivas

$$\frac{1}{\cos x}(x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)),$$

  där vi observerar att $\cos x \to 1$, då $x \to 0$. Uttrycket kan skrivas

$$\frac{e^{x^2} - 1}{\tan x} = \cos x \, \frac{x^2 + x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)}.$$

  Genom att dividiera med x både i täljare och nämnare, får vi att nämnaren $\to 1$ och täljaren $\to 0$. Gränsvärdet är alltså 0.

Kommentar Man inser att

$$\frac{\tan x}{e^{x^2} - 1}$$

saknar gränsvärde, då $x \to 0$.

$\blacksquare$

Ex 3 Vi beräknar gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin^2(3x)\cdot\ln(2x+1)}$ m.h.a. Maclaurinutveckling.

Lösning:

Det gäller att utveckla till så låg grad som möjligt för att få ett så enkelt uttryck som möjligt.

$$\begin{aligned}
\sin^2 3x &= (\sin 3x)^2 = (3x+\mathcal{O}(x^3))^2 \\
&= 9x^2 + \mathcal{O}(x^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1) &= 2x - 4x^2/2 + \mathcal{O}(x^3) \Longrightarrow \\
\sin^2(3x)\cdot\ln(2x+1) &= (9x^2+\mathcal{O}(x^4))(x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)) \\
&= 18x^3 + \mathcal{O}(x^5).
\end{aligned}$$

Därför blir uttrycket

$$\frac{x^3}{\sin^2(3x)\cdot\ln(2x+1)} = \frac{x^3}{18x^3+\mathcal{O}(x^5)} = \frac{1}{18+\mathcal{O}(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{18} \text{ då } x\to 0.$$

$\blacksquare$

Ex 4 Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2}-e}{\ln x}$.

Lösning:

Gränsvärdet är av typ ”$\dfrac{0}{0}$” men vi måste här utveckla funktionerna i $x_0 = 1$.

- Nämnaren:

  $$g(x) := \ln x,\quad g(1)=0,\quad g'(x)=\frac{1}{x},\ g'(1)=1 \Rightarrow g(x) = (x-1)+\mathcal{O}((x-1)^2).$$

- Täljaren:

  $$f(x) = e^{x^2}-e,\quad f(1)=0,\quad f'(x)=2xe^{x^2},\quad f'(1)=2e \Rightarrow f(x) = (x-1)2e+\mathcal{O}((x-1)^2).$$

- Uttrycket

  $$\frac{f}{g} = \frac{(x-1)2e+\mathcal{O}((x-1)^2)}{(x-1)+\mathcal{O}((x-1)^2)}\cdot\frac{1/(x-1)}{1/(x-1)} = \frac{2e+\mathcal{O}((x-1))}{1+\mathcal{O}((x-1))}$$

  med gränsvärde $\dfrac{2e}{1} = 2e$ (Svar).

$\blacksquare$