1 Föreläsning 14, följder och serier

1.1 Följd

- I en följd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ skriver vi istället elementen som $f(n)$.
- Följden $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad, ty $|\sin n| \leq 1$.
- Följden $\{1/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent mot 0:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \text{ då } n \to \infty.$$

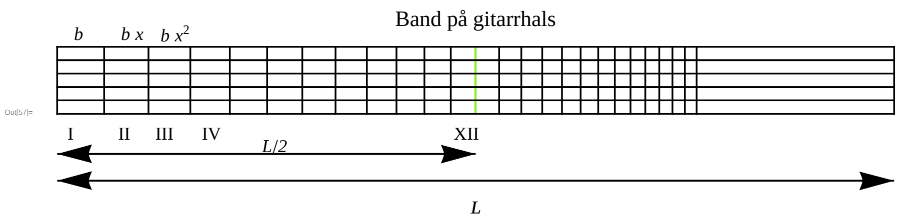
- Följden $\left\{\frac{2n-1}{2-3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot

$$\frac{2n-1}{2-3n} = \frac{2-1/n}{2/n-3} \to -\frac{2}{3}.$$

Definition: En följd, sådan att $|f(n)| \leq C$ för alla n är *begränsad.*

Sats: En konvergent följd är begränsad.

Ex: (a) Bandbredderna på en gitarr ges av $b(k) = b \cdot 12^{-k/12}$, där b_0 är bredden på det första bandet.



$x = 2^{-1/12}$. b brukar vara 35 mm för en normalstor gitarr.

(b) Hur skall man bekriva följden

$$\{1, 2, 3, 8, 10, 12, 13, ...\}\,?$$

1.2 Några exempel på serier

1.3 Serie

- Med en *partialsumma* menas $\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Geometrisk serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \begin{cases} = \dfrac{1}{1-x}, & \text{om } |x| < 1 \\ \text{divergent om } |x| \geq 1 \end{cases} .$$

Detta är ett exempel på en funktionsserie och är Maclaurinserien för $f(x) := \frac{1}{1-x}$.

Ex: Serien

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

är geometrisk med $x = 2/3$. Den kan skrivas

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{j=2}^{\infty} (2/3)^{j-2} = \{j-2=k\} = \frac{4}{9} \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-2/3} = \frac{4}{3}.$$

Teleskopsumma: Termerna i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ kan delas upp partialbråk:

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Det gör att partialsumman

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ då } n \longrightarrow \infty.$$

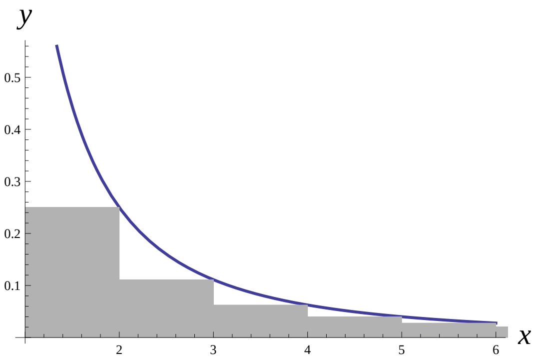
Alltså är seriens summa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Integral och serie: Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent?

Lösning:

Vi jämför med $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$. Termerna i serien kan skrivas $f(k) = \frac{1}{k^2}$ och integralen (som är konvergent) kan skrivas $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Vi kan jämföra partialsumman $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ med dito integral.



Vi förstår att summan av rektanglarnas areor är en undersumma till integralen, så att

$$\sum_{k=2(!)}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$

Termerna i serien är ju ≥ 0, en s.k. positiv serie. Genom att låta $n \longrightarrow \infty$ får vi att integralen växer och alltså konvergerar mot 1. Därmed kan inte seriens summa vara ∞ och alltså kommer partialsummorna växa mot ett reellt positivt tal. Det visar att seriens summa är samma tal och alltså konvergent.

Kommentar: Partialsumman är en undersumma till motsvarande integral. Man kan också ha en liknande partialsumma, som översumma.

Kommentar: Man kan visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Integralkriteriet (Theorem 9.3:8): Antag att $f(x) \geq 0$ och avtagande på intervallet $[0, \infty)$. Då gäller

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent } \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent.}$$

Ekvivalensen följer av den första kommentaren.

$p-$testet: Med $p = \alpha$ kan vi ur föregående sats sluta oss till att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ konvergent } \iff \alpha > 1.$$

Speciellt är den *Harmoniska serien*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \text{ d.v.s. divergent.}$$

A comparison test: (Theorem 9.3:9) Ett jämförelsetest mellan två positiva serier ser ut som motsvarande test för integraler.

Antag $0 \le g(k) \le f(k)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent. Då är $\sum_{k=1}^{\infty} g(k)$ konvergent.

Ex: Teleskopsumman $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ har vi visat är konvergent genom att beräkna den. *Konvergens* följer (även om vi inte får seriens summa) också av Jämförelskriteriet ovan eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent och

$$0 \le g(k) := \frac{1}{k^2+k} \le f(k) := \frac{1}{k^2}.$$

- Räcker det, för en serie, d.v.s. $a_k = f(k)$, att $f(k) \to 0$, då $k \to 0$ för att vi skall ha en konvergent serie? Svaret är nej, eftersom med ex.vis $\alpha = 1/2$ är $1/k^{1/2} \to 0$, då $k \to \infty$ men motsvarande serie är divergent.
- Villkoret ovan är alltså inte *tillräckligt* för konvergens men *nödvändigt* (enligt nästa sats).

Sats: (Theorem 9.2:4) *Antag* att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent. Då gäller att $f(k) \longrightarrow 0$, då $k \longrightarrow \infty$.

Bevis: Sätt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = S$, som är S ett reellt tal.

$$f(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) \longrightarrow S - S = 0 \text{ då } n \longrightarrow \infty.$$

- I likhet med generaliserad integral finns begreppen absolutkonvergens och betingad konvergens.

Definition: En serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är absolutkonvergent om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|$ är konvergent.

Sats: En absolutkonvergent serie är konvergent.

Ex: Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt tidigare exempel. Alltså är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ konvergent, ty med $f(k) = (-1)^{k-1}/k^2$ är $|f(k)| = 1/k^2$ och motsvarande serie är ju konvergent.

Ex: Beräkna summan av serien i föreg. exempel m.h.a. resultatet för serien som belyser integralkriteriet.

Lösning:

Kalla den sökta seriens summa för S_0. Vi utgår alltså från att $S_1 := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \frac{\pi^2}{6}$. Vi sätter S_2 som summan av de termer som motsvarar jämnt index som

$$S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} S_1.$$

Sätt

$$S_3 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

d.v.s. S_3 är summan som motsvarar udda index. Nu är

$$S_0 = S_3 - S_2 \text{ samt } S_1 = S_3 + S_2 \text{ som ger } S_0 = S_1 - 2S_2.$$

Det ger

$$S_0 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ett comparison test till (Theorem 9.3:10)

Antag att $f(k)$ och $g(k) > 0$ samt att $\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{f(k)}{g(k)} =: A$ där A ett positivt tal ($A > 0$). Då gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \text{ konvergent.}$$

Definition: En serie som är konvergent men inte absolutkonvergent kallas *betingat* konvergent.

Kvot och rottestet (Theorem 9.3:11 and 9.3:12)

Kvottestet

Antag att $\lim_{m \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \rho$ med alla $f(n) > 0$. existerar.

(a) Om $0 < \rho < 1$, så är $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent.

(b) Om $1 < \rho$, så är $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergent.

(c) $\rho = 1$ ger ingen information om konv. eller div.

Rottestet

Antag att $\lim_{m \to \infty} \sqrt[n]{f(n)} = \sigma$ med alla $f(n) > 0$. existerar.

(a) Om $0 < \sigma < 1$, så är $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent.

(b) Om $1 < \sigma$, så är $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergent.

(c) $\sigma = 1$ ger ingen information om konv. eller div.

- För serier med termer, som alternerar tecken, gäller utsagorna ovan för $|f(n)|$.

Ex: Undersök om serien $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{j^2}$ är konvergent eller divergent.

Lösning:

Vi tar rottestet till hjälp.

$$f(j)^{1/j} = (1 - 1/j)^j \longrightarrow \frac{1}{e} =: \sigma < 1 \text{då } j \longrightarrow \infty.$$

Alltså är serien konvergent.

Leibnizs kriterium: Om $|f(k)| \geq |f(k+1)| \to 0$ då $k \longrightarrow \infty$ och $f(k)f(k+1) < 0$, så är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent.

Ex: Serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ uppfyller L:s kriterium och är alltså konvergent. Enligt Maclaurinserien för $\ln(x+1)$ är dess värde $\ln 2$.

Kommentar ang. bet. konv. Leibnizs kriterium visar att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är betingat konvergent. Summan av de negativa resp. positiva termerna är

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty, \text{ resp. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty.$$

Tydligen är både den positiva "delserien" och den negativa "delserien" ∞ resp. $-\infty$.
I partialsummorna "balanserar" de varandra:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Men vad händer om man adderar två positiva termer och en negativ?

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + ...$$

Man kan visa att denna summa är större än $\ln 2$ nämligen $1.5 \cdot \ln 2$.
Man kan, med en betingad konvergent serie få den att konvergera mot vilket reellt tal som helst och t.o.m. divergera (mot $\pm\infty$) genom lämpliga omordningar av additionen av termerna!

- Det ovan nämnda är typiskt för alla betingat konvergenta serier.