Föreläsning 2 $\sum$ och Integralens definition och enkla exempel

Definition av integral

$$\text{Beräkning av } \int_0^1 x^2\,dx \textbf{ m.h.a. under- och översummor}$$

Vi beskriver idén med funktionen $f(x) = x^2$, som integreras över intervallet $\{x : 0 \le x \le 1\} = [0, 1]$. Summan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n$$

är härledd i boken och i ett dokument, länkat från kurshemsidan. Vi får en undersumma till integralen som är

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} (k/n)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}\right) =$$

$$\frac{(1-1/n)^3}{3} + \frac{(1-1/n)^2}{2n} + \frac{1-1/n}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

Vi får p.s.s. en översumma till integralen som är

$$ö_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (k/n)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

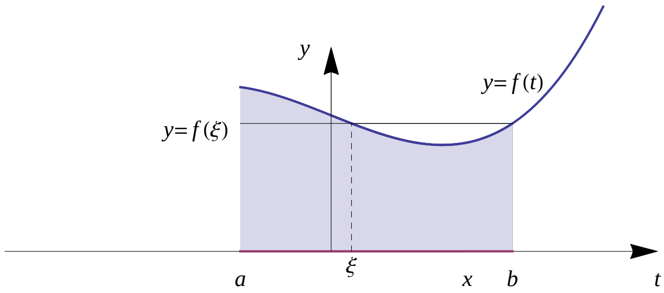
Kommentarer

- Observera att $u_n \le ö_n$ för alla under- och översummor. Det gäller t.o.m. att $u_m \le ö_n$, $m, n = 1, 2, 3, \ldots$.
- Att precis ett tal, i detta fall talet $1/3$ ligger mellan alla dessa under- och översummor, säger att integralen $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ existerar och antar värdet $1/3$.
- Även om man inte har lika långa delintervall $\Delta x = 1/n$, så kan man visa att det bara finns *ett* tal mellan alla under- och översummor, nämligen talet $1/3$.
- I $\int_a^b f(x)dx$, så kallas $\int$ för integraltecken, a undre gräns, b övre gräns, $f(x)$ integrand och dx differential.

Integralkalkylens medelvärdessats I

Theorem 1 *Antag att $f(x)$ kontinuerlig på $[a, b]$. Då finns ett $\xi \in [a, b]$, sådant att*

$$(b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx.$$



Integralen $\int_a^b f(x)dx =$ *rektangelns area.*

Integralkalkylens fundamentalsats (5.5)

Theorem 2 *Vi definierar*

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

Då är $F_0'(x) = f(x)$.

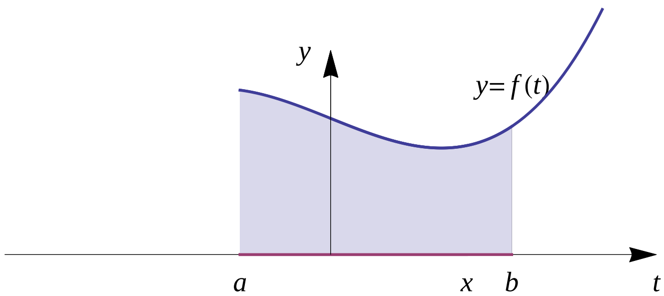
Bevis Ur figuren definierar vi "areafunktionen" $\int_a^x f(t)dt =: F_0(x)$, som arean mellan $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ och $x = x$. Vi ser att

$$F_0(x+\Delta x) - F_0(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x \text{ så att } \frac{F_0(x+\Delta x) - F_0(x)}{\Delta x} = f(\xi)\,.$$

Om nu $\Delta x \to 0$, kommer $\xi \to x$ och $f(\xi) \to f(x)$ p.g.a. kontinuitet.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_0(x+\Delta x) - F_0(x)}{\Delta x} = F_0'(x) \tag{2}$$

där den sista likheten följer av att mittenledet är differenskvoten för $f(x)$.



Integralen $\int_a^x f(t)dt =: F_0(x)$

∎

Kommentarer

1. Begreppen under- och översumma fungerar även om $f(x) < 0$, helt eller delvis i integrationsintervallet .

2. För en begränsad funktion $f(x)$ i ett intervall $[a, b]$ definierar man under- och översummor u respektive $ö$. Om det finns precis ett tal mellan alla u och $ö$, så är detta tal *integralen av* $f(x)$ och skrivs alltså

   $$\int_a^b f(x)dx\,.$$

   Man säger att $f(x)$ är integerbar över intervallet $[a, b]$ (i Riemanns mening).

3. Ett intervall, såsom $[a, b]$ är slutet och begränsat och kallas kompakt. Man kan visa att en *kontinuerlig* funktion $f(x)$ är integrerbar.

4. En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x) = f(x)$ kallas *primitiv funktion* till $f(x)$. Ex.vis är $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ en primitiv funktion till $f(x) = x^2$. Även $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ är det. I själva verket ges alla primitiva funktioner till $f(x) = x^2$ av $\dfrac{x^3}{3} + C$, där C är en konstant.

5. Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$ i (1). Med konstruktionen av areafunktionen som $F_0(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, ser vi att $F_0(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. Då är alltså $F(x) + C = F_0(x)$ för någon konstant C. Vi sätter $x = a$. Då är $F_0(a) = 0 = F(a) + C$, så att $C = -F(a)$. Därmed är $F_0(x) = F(x) - F(a)$. Sätt nu $x = b$. Då får vi $F_0(b) = F(b) - F(a)$, d.v.s.
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,. \tag{3}$$
Det mellersta uttrycket är bara ett praktiskt mellanled. Man kallar (3) för *insättningsformeln*.

6. Om integranden $f(x) < 0$, bidrar detta med en "area" < 0. Integral är "area med tecken".

Ex 1 Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx$.

Lösning: Vi utnyttjar att integranden är en jämn funktion. Med $f(x) = x^2$ kan detta uttryckas som att $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Detta betyder att
$$\int_{-1}^{1} x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = ... = \frac{2}{3}\,.$$
I föregående exempel är integranden jämn och integrationsintervallet symmetriskt (kring origo).

Ex 2 Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x\,dx$.

Lösning: Integranden är udda och integrationsintervallet symmetriskt. Att den är udda innebär att
$$g(-x) := \sin^5(-x) = (-\sin x)^5 = -\sin^5 x\,.$$
Då är integralen $= 0$.

Ex 3 Beräkna integralen...
$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \int_1^3 x^{-2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Ex 4 Givet funktionen $e^{-x/2} =: f(x)$.

(a) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

(b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)$.

(c) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)$.

Lösning:

(a) En primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ är $F(x) = -2 \cdot e^{-x/2}$. Detta ser man genom att derivera funktionen $F(x) = -2 \cdot e^{-x/2}$:

$$F'(x) = \underbrace{e^{-x/2}}_{\text{yttre derivata}} \cdot \underbrace{(-2)}_{\text{inre derivata}} = \{\text{och alltså}\} = f(x)\,.$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \left[-2 \cdot e^{-x/2}\right]_0^2 = \left[-2e^{-x/2}\right]_0^2 = -2(e^{-2/2} - e^{-0/2}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

(b) *Alla* primitiva funktioner till $f(x)$ är

$$\int e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2} + C \text{ där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

(c) *En* primitiv funktion till $f(x)$ är ex.vis $F(x) := 2(1 - e^{-x/2})$.

Kommentarer

- Det gäller att kunna skilja på de tre olika frågorna i exemplet ovan.
- Vi ser att det är bra att (I) skriva om integralen och/eller integranden *innan* integrationen
- och därefter (II) ta fram en primitiv funktion och till sist
- (III) förenkla/skriva om svaret.
- Vi kan lösa (a) genom att byta plats på undre och övre gräns, *och* byta tecken på den primitiva funktionen.

  $$\int_0^2 f(x)dx = \left[-2 \cdot e^{-x/2}\right]_0^2 = 2\left[e^{-x/2}\right]_2^0 = 2(e^{-0/2} - e^{-2/2}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

- Alternativt kan man byta tecken redan på *integranden* och därmed plats på gränserna (Jämför med förra punkten).
- $\int f(x)dx$ kallas *obestämd* integral och betyder *alla* primitiva funktioner till $f(x)$. Detta innebär att $\int f(x)dx = F(x) + C$, där F är en prmitiv funktion till $f(x)$ och C är en godtycklig konstant.
- $\int_a^b f(x)dx$ är ett (reellt) tal och kallas *bestämd* integral.

Ex 5 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$.

Lösning: Integranden är x^{-1}, en potensfunktion. En primitiv funktion är då $\dfrac{x^{-1+1}}{-1+1}$ men detta fungerar bara om exponenten $\neq -1$. I just detta fall är exponenten -1. En primitiv funktion är då $\ln|x|$.

Svar: $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, där C är en godtycklig konstant.

Kommentarer

- Man kan göra följande omskrivning.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln(e^C) = \ln|k\,x|$$

  där $k = e^C$.

- Man kan inte integrera denna funktion över en mängd, såsom $[-1, 1]$, eftersom $f(x) = \dfrac{1}{x}$ inte är definierad för $x = 0$ (en "singularitet").

- Att integrera

Primitiv funktion till potensfunktion

Mer allmänt är

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \\ \ln|x| + C, & n = -1 \end{cases} \tag{4}$$

Ex 6

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5x^2}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(\sqrt{x} + 5x^{3/2}\right) dx = \int x^{1/2}dx + 5\int x^{3/2}dx = \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2 \cdot x^{5/2} + C = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}(3x+1) + C \end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant.

Integral av exponentialfunktion

Ex 7 Bestäm en primitiv funktion till (a) $e^{-x/2}$, (b) $3 \cdot 2^x$.

Lösning: Vi har redan löst denna integral i exempel 4. (a)

$$\int e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2} + C$$

därför att

$$D\,e^{-x/2} = e^{-x/2} \cdot (-1/2)\,.$$

För funktionen $e^{-x/2}$ är e^z yttre funktion och $z = -x/2$ inre funktion. Denna funktion är "linjär", d.v.s. på formen $z = k\,x + m$, så att dess derivata är konstant $= k$. Då och endast då skall man "kompensera" för den inre funktionens derivata k, genom att dividera med k. I detta exempel är $k = -1/2$, så att division med k ger faktorn -2.
(b) Vi skriver om funktionen så att basen blir e.

$$3 \cdot 2^x = 3 \cdot e^{x \ln 2}$$

så att en primitiv funktion är $\dfrac{3}{\ln 2} \cdot 2^x$.

Integral av trigonometriska funktioner

Ex 8

Funktion	Primitiv funktion
$\cos x$	$\sin x$
$\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$1+\tan^2 x \equiv \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\cos^2 x \equiv \frac{1+\cos 2x}{2}$	$\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{2}$

Ex 9 Bestäm en primitiv funktion till $\cos^3 x =: h(x)$.

Lösning:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1-\sin^2 x)\cos x\,.$$

Vi ser att $\cos x$ är derivatan till $\sin x$. En primitiv funktion ges av

$$H(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\,,$$

ty när vi deriverar $H(x)$ får vi

$$H'(x) = \cos x - 3\cdot\frac{\sin^2 x}{3}\cdot\cos x = (1-\sin^2 x)\cos x\,.$$

Att det ta fungerar beror på att den inre derivatan är $\cos x$ och $\cos x$ finns som faktor till integranden.
I princip klarar man att integrera/bestämma primitiv funktion till alla udda exponenter av $\sin x$ och $\cos x$ på liknande sätt. Om en jämn potens av $\sin x$ eller $\cos x$ är integrand, klarar man det med trigonometriska omskrivningar, ex.vis

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$