Föreläsning 3

Derivata och integral, några samband

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

Antag att $f'(x)$ är kontinuerlig på ett intervall.

$$\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + C$$

Vidare:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \text{ ty } \frac{d}{dx}(\ln x + C) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{t}dt = \frac{d}{dx}(\ln x - \ln a) = \frac{1}{x},\ \frac{d}{dx}\int_a^x \ln t dt = \ln x \text{ och } \frac{d}{dx}\int_a^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x).$$

Lite om linearitet

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Bevis genom att derivera båda led.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis genom att låta $F(x)$ och $G(x)$ beteckna primitiv funktion till f resp. g.

Variabelsubstitution

Obestämd integral

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Förutsättning: $x'(t)$ är kontinuerlig och $f(x)$ kontinuerlig.
Obs! Likheten är en likhet sånär som på en additiv konstant.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Förutsättningar som ovan, samt att $x(\alpha) = a$ och $x(\beta) = b$.

Ex 1 Beräkna $\displaystyle\int_0^1 e^{x/2}\,dx$. LösningVi vet att $F(x) := \dfrac{1}{1/2}\,e^{x/2} = 2e^{x/2}$ är en primitiv funktion. Alltså är

$$\int_0^1 e^{x/2}\,dx = \left[2e^{x/2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{e} - 1).$$

Alternativt kan man gör en V.S. $x = 2t = x(t)$, så att

$$\begin{cases} x = 2t,\ \dfrac{dx}{dt} = 2 \iff dx = 2dt \\ x = 0 \iff t = 0,\ x = 1 \iff t = 1/2 \end{cases} \implies$$

$$\int_0^1 e^{x/2}\, dx = 2\int_0^{1/2} e^t dt = 2(e^{1/2} - 1) = 2(\sqrt{e} - 1)$$

d.v.s. samma svar.

Om $f(x)$ och $x'(t)$ kontinuerliga så är

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}.\, dt \tag{1}$$

Om dessutom $x(\alpha) = a$ och $x(\beta) = b$, så är

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}.\, dt \tag{2}$$