Föreläsning 4

Area mellan kurvor

För en funktion $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a, b]$ är $\int_a^b f(x)dx$ arean mellan kurvan $y = f(x)$ och $y = 0$ med $a \leq x \leq b$.

Ex 1 Givet funktionerna $f(x) = x^2 - 4x - 1$ och $g(x) = 2x - 1$. Kurvorna begränsar ett område. Beräkna områdets area.

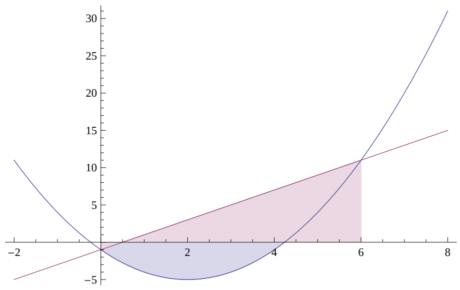
Lösning:

Vi beräkna skärningspunkterna mellan kurvorna:

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 6.$$

Detta ger arean

$$A = \int_0^6 (g(x) - f(x))dx = \int_0^6 (6x - x^2)dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = ... = 36.$$



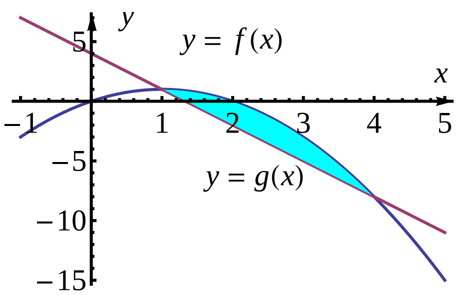
Kommentarer

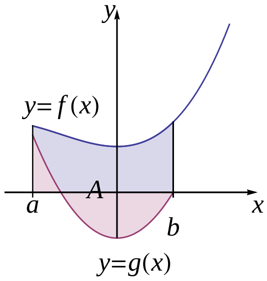
- Om $f(x) \geq g(x)$ i intervallet $[0, 6]$ hade vi fått areana men med fel tecken. Alltså behöver man i ett sådant fall bara byta tecken.
- För två kurvor som skär varandra tre gånger får man hålla reda på var $f(x) \geq g(x)$ och vice versa.
- I principe är arean mellan två funktionskurvor

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

om $a \leq b$ även om a och b inte är skärningspunkter mellan kurvorna.

- Arean blir korrekt beräknad, om bara $a \leq b$ och $f(x) \geq g(x)$ i intervallet, även om någon av kurvorna ligger (delvis) under $x-$axeln.





Triangel-olikheten för integral

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq |\int_a^b f(x)dx|, \text{ om } a \leq b.$$

Partiell integration

För att integrera en produkt av två funktioner, ex.vis $h(x) = x\cos(x/2)$, alltså en polynom ggr en trigonometrisk funktion, kan man inte ta primitiv funktion till resp. faktor. I stället utnyttjar man derivata av produkt: Sätt F som p.f. till f, d.v.s. $F' = f$. Då är $\frac{d}{dx}(Fg) = Fg' + fg$. Vi integrerar båda led och får

$$Fg = \int Fg'dx + \int fg\,dx \Longleftrightarrow \int fg\,dx = Fg - \int Fg'dx.$$

Man börjar alltså med en integral av en produkt fg i VL och får en *utintegrerad term* Fg och en ny integral i HL, som förhoppningsvis är enklare att "lösa" än integralen i VL.

Ex 2 Beräkna $\int_0^\pi x\cos(x/2)dx$.

Lösning:

Vi väljer $f = \cos(x/2)$ och $g = x$, den funktionen som skall deriveras i HL:s integral. Vi beräknar först utan gränser.

$$\int x\cos(x/2)dx = x{\cdot}2\sin(x/2) - \int 1{\cdot}2\sin(x/2)dx = 2x\cos(x/2) + 4\cos(x/2) + C.$$

Med gränser får vi

$$\int_0^\pi x\cos(x/2)dx = [2x\sin(x/2) + 4\cos(x/2)]_0^\pi = 2(\pi - 2).$$

Kommentarer

- Om vi valt $f = x$, hade nästa integral blivit än mer svårlöst.
- Antag att $p(x)$ är ett polynom.
  För
  $$\int p(x) \cdot \begin{cases} \cos(kx) \\ \sin(kx) \\ e^{kx} \end{cases} dx, \text{ välj } p(x) = g(x).$$
  För
  $$\int p(x) \cdot \begin{cases} \arctan(kx) \\ \ln(kx) \end{cases} dx, \text{ välj } p(x) = f(x).$$

Ex 3 Beräkna en p.f. till x^2e^{3x}.

Lösning:

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \cdot \frac{e^{3x}}{3}dx = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - 2x \cdot \frac{e^{3x}}{9} + \int 2 \cdot \frac{e^{3x}}{9}\, dx.$$

och den sista inegralen är lätt att beräkna/lösa.

Integral av rationell funktion

En *rationell funktion* är en kvot mallan två polynom.

Ex 4 Ex.vis $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$. här är grad tälj $\geq$ grad nämn. Man *utvecklar* $f(x)$ med polynomdivision, som visar sig gå jämnt upp:

$$f(x) = 2x - 1.$$

I allmänhet får man dock en restterm $\neq 0$.

Ex 5 Skriv följande två termer på MGN...

Lösning:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3} = \{\text{MGN}\} = \frac{2(x-5)+5(x+1)}{(x+1)(x-5)} = \frac{7x-1}{x^2-2x-3}.$$

Ex 6

(a)

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^2-2x-3}$$

är en rationell funktion, liksom

(b)

$$g(x) = \frac{3x^3-7x^2+2}{x^2-2x-3}.$$

Vi iakttar att grad täljare $<$ grad nämnare i (a) och grad täljare $\geq$ grad nämnare i (b). Vi skall utveckla dessa två funktioner.

(a) Här är $f(x)$ funktionen densamma som i förra exemplet, som från början är utvecklat. Vi *ansätter* $f(x)$ i två termer

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

Principen för denna *uppdelning i partialbråk*, PBU, är att nämnaren är faktoriserad så långt som möjligt, $(x+1)(x-3)$ och att täljarna ansätts till en grad lägre än respektive nämnare, alltså konstanter, A och B. Liknämnigt ger likheten

$$\frac{7x-1}{x^2-2x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{x^2-2x-3}.$$

Likheten är en identitet och nämnarna är lika. Alltså måste täljarna vara lika:

	VL		HL
$x:$	7	$=$	$A+B$
$1:$	-1	$=$	$-3A+B$

Med lösning $(A,B)=(2,5)$. Därmed får vi likheten

$$f(x)=\frac{7x-1}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}.$$

(b) Här är funktionen

$$g(x)=\frac{3x^3-7x^2+2}{x^2-2x-3}.$$

Eftersom grad täljare $\geq$ grad täljare, brukar man börja med att dividera polynomen med *polynomdivision*, som görs med liggande stolen. Kvoten är ett polynom av grad $3-2=1$ (Täljarens grad minus nämnarens grad) och resttermen (resten) är ett polynom av lägre grad än nämnaren. Divisionen ger ett resultat som i princip ser ut som följer

$$g(x)=\frac{3x^3-7x^2+2}{x^2-2x-3}=\underbrace{Ax+B}_{\text{kvot}}+\underbrace{\frac{\alpha x+\beta}{(x+1)(x-5)}}_{\frac{\text{rest}}{\text{nämnaren}}}.$$

Nu kan, i sin tur, den andra termen delas upp partialbrŒk, enligt (a). Vi skall använda en alternativ lösningsmetod, som hoppar över polynomdivisionen. Totalt sett ansätter vi utvecklingen

$$g(x)=\frac{3x^3-7x^2+2}{x^2-2x-3}=Ax+B+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-3}.$$

Liknämnigt ger

$$g(x)=\frac{3x^3-7x^2+2}{(x+1)(x-3)}=\frac{(Ax+B)(x^2-2x-3)+C(x-3)+D(x+1)}{(x+1)(x-3)}.$$

Återigen har vi en identitet med samma nämnare i VL och HL.

	VL		HL
$x^3:$	3	$=$	A
$x^2:$	-7	$=$	$-2A+B$
$x:$	0	$=$	$-3A-2B+C+D$
$1:$	2	$=$	$-3B-3C+D$

Man får lösningen $A=3$, $B=-1$, $C=2$, $D=5$. Utvecklingen är alltså

$$g(x)=3x-1+\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}.$$

Kommentarer

- Speciellt ser vi att i (b) är $A=3=\frac{3}{1}$, d.v.s. kvoten mellan täljarens och nämnarens högstagradskoefficienter.

- Ansättningen med koefficienter ger upphov till ett *linjärt ekvationssystem* och kan beskrivas av lika många ekvationer som variabler. Det går att lösa på matrisform eller som matrisekvation med en kvadratisk inverterbar koefficientmatris.

- Utvecklingen gör att en rationell funktion kan integreras.

- I ämnet *Reglerteknik* använder man sig av uppdelning i partialbråk (PBU).

Ex 7 Givet funktionen

$$h(x) = \frac{6x^3 - 19x^2 - 19x - 13}{2x^2 - 7x - 4}.$$

För att utveckla denna ratonella funktion, ser vi att nämnaren är $(x-4)(2x+1)$. Ansättningen är

$$h(x) = \frac{6x^3 - 19x^2 - 19x - 13}{2x^2 - 7x - 4} = 3x + B + \frac{C}{x-4} + \frac{D}{2x+1},$$

där vi predikterat att $A = \frac{6}{2} = 3$.

$$h(x) = \frac{6x^3 + (C + D - 12)x^2 + (-7B + 2C + D - 12)x - 4B + C - 4D}{(x-4)(2x+1)}.$$

Detta ger ekvationssystemet

	VL		HL
x^3 :	6	$=$	6
x^2 :	-19	$=$	$2B - 21$
x :	-19	$=$	$-7B + 2C + D - 12$
1 :	-13	$=$	$-4B + C - 4D$

med lösningen $B = 1$, $C = -1$ och $D = 2$, som ger att

$$h(x) = 3x + 1 - \frac{1}{x-4} + \frac{2}{2x+1}.$$