1 Föreläsning 5

- Mer om partiell integratíon

Ex 1
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1} \text{ och } \frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x.$$

Beräkna $\int_0^1 \arctan x\, dx$ (Övning 5.3:15).

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^1 1\cdot\arctan x\, dx &= \{\text{P.I.}\} = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \\ &= 1\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Rationell fktion:

Ex 2 Beräkna
$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{3x^2+3}{x^3+x^2+2x+2}\, dx.$$

Lösning:

Vi börjar med att utveckla integranden
$$f(x) := \frac{3x^2+3}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{3x^2+3}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{3(x^2+1)}{(x+1)(x^2+2)}$$
som tyvärr inte kan förenklas. Vi ser att grad tälj$= 2 <$ grad nämn $= 3$. Alltså PBU:
$$\frac{3x^2+3}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{3(x^2+1)}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$
Principen är att täljaren ansätts till ett polynom av en grad lägre än nämnaren. Vi får efter att vi gjor t liknämnigt i HL
$$f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+2}.$$
$$\int_0^{\sqrt{6}} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x/\sqrt{2}) + 2\ln(x+1)\right]_0^{\sqrt{6}}$$

Ex 3 Beräkna en p.f. till $\frac{2x-1}{(x+1)^2}$.

Lösning:

$$g(x) := \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.$$
En p.f. är $G(x) := 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1}$.

- För $\dfrac{p(x)}{(x+a)^m}$, där p är ett polynom av grad $< m$ och $m \in \mathbb{Z}_+$ ser ansättningen ut så här (PBU):

$$\frac{p(x)}{(x+a)^m} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + ... + \frac{A_m}{(x+a)^m}.$$

Man kan underlätta det lite ansättningen lite:
Sätt grad $p(x) = n$. Då är $m - n > 0$ och koefficienterna $A_1 = A_2 = ... = A_{m-n-1} = 0$.

Gen. integral Med en *generaliserad (improper)* integral menas här att integrationsintervallet eller integranden är obegränsad.

Ex 4 (a) Integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ har obegränsad integrand i intervallet $(0, 1]$.

(b) Integralen $\displaystyle\int_0^\infty (x-1)e^{-x/2}dx$ har obegränsat (integrations-)intervall.

Ex 5 Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^4+4}\,dx.$$

Vi skall utveckla integranden. Nu är grad tälj¡grad nämn, så det är PBU som gäller.

Lösning:

Hur faktoriserar vi nämnaren? Vi försöker med K.K.

$$x^4+4 = (x^2)^2+2x^2 2+2^2-4x^2 = (x^2+2)-(2x)^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)\,.$$

Ansättning

$$\frac{4}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} \text{ som ger } \begin{cases} A &= 1/2 \\ B &= 1 \\ C &= -1/2 \\ D &= 1 \end{cases}$$

Det ger

$$\int \frac{4}{x^4+4}dx = \frac{1}{4}\left(2\arctan(x+1) + 2\arctan(x-1) + \ln\left[\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right]\right) + C.$$