1 Föreläsning 6, TMV138, TMV181

1.1 Triangelolikheten för integral

Det är klart att $\pm x \leq |x|$. Vi har att om $a < b$ och $f(x) \leq g(x)$ på intervallet $[a, b]$ och är kontinuerliga, så är

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ (monotonitet).}$$

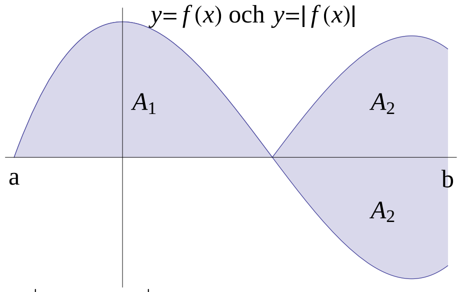
Speciellt är

$$\pm f(x) \leq |f(x)| \text{ som ger att } \pm \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Men eftersom antingen är $+\int_a^b f(x)dx \geq 0$ eller $-\int_a^b f(x)dx \geq 0$, så är

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Detta är triangelolikheten för integral.



I figuren är $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |A_1 - A_2| \leq \int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2$

1.2 Generaliserad integral

Definition En integral är generaliserad, om integranden är obegränsad (typ II, i boken sid $19^2 - 1^2$).
En integral är generaliserad, om integrationsintervallet är obegränsad (typ I, i boken sid $(19 - 1)(19 + 1)$).
För båda typerna handlar det om gränsvärde. Integralen är konvergent, om detta gränsvärde existerar, d.v.s. är entydigt och reellt, annars divergent.

Sats (”$p-$integral” i boken sid $2^2 \cdot 7 \cdot 13$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha < 1 \\ \text{divergent om } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergent om } \alpha > 1 \\ \text{divergent om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Ex 1 Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}$.

Lösning

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \{\text{V.S. } e^x+1=t \Leftrightarrow x=\ln(t-1) \to dx=\frac{dt}{t-1}\} = \int \frac{1}{t(t-1)}\,dt =$$

$$\{\text{PBU}\} = \int \left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right] dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C \Longrightarrow$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{1}{1+e^{-b}} - \ln\frac{1}{1+e^{-0}}\right] = \ln 2\,.$$

Ex 2 Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

Lösning

Den är generaliserad, ty obegr. integrand ($\ln x \to -\infty$, då $x \to 0_+$). Vi löser den med P.I. med $f(x)=1$ och $g(x)=\ln x$.

$$\int 1\cdot \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

$$\int_a^1 \ln x\,dx = [1\cdot\ln 1 - 1 - (a\ln a - a)] \Longrightarrow 0-1-(0-0) = -1,$$

ty $a\ln a \to 0$ då $a\to 0_+$.

Svar:

Integralen är konvergent med värdet -1.

Ex 3 Integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ är generaliserad på två sätt, hur? Beräkna integralen!

Lösning

Integrationsintervallet är obegr. och integranden $\to\infty$, då $x\to 0_+$, alltså obegr. integrand.
Vi gör en V.S. med ex.vis $t=\sqrt{e^x-1}$, som ger att $x=\ln(t^2+1) \Longrightarrow dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}$. Nya gränser blir desamma, $t=0$ och $t=\infty$. Vi integrerar över $[0,b]$:
$$\int_0^b \frac{2tdt}{t(t^2+1)} = 2[\arctan t]_0^b = 2(\arctan b - \arctan 0) \to \pi$$
då $b\to\infty$.

- För en funktion $f(x)\geq 0$ på ett intervall, säg $J=[0,\infty)$, där f generaliserad i ∞, gäller att
$$\int_0^b f(x)dx \text{ är pos. och växande i } b.$$
så att antingen är $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ divergent med värde $+\infty$ eller konvergent med ändligt värde.

■ Montoniteten ger, för $0 \le f \le g$ på ett intervall, att

$$0 \le \int_0^\infty f(x)dx \le \int_0^\infty g(x)dx$$

Om höger integral konvergent är den $= A < \infty$ för ngt reellt värde A (som är integralens värde). Alltså är även vänster integral konvergent! Detta "test" går under namnet ett *Comparison theorem sid* $2 \cdot 3 \cdot 61$. Integralerna kan var generaliserade på annat sätt (annat intervall eller obegr. integrander).

Ex 4 Är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ konvergent?

Lösning

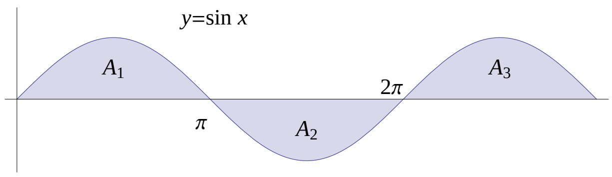
Vi behöver bara kontrollera $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ och där jämföra med $x^{-3/2}$, ty

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \le x^{-3/2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$ är konvergent ($p-$ theorem).

Ex 5 Är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, dx$ konvergent?

Lösning



Areorna $A_j = 2, \quad j = 1, 2, \ldots$

Vi ser att

$$\int_0^{\pi+2\pi n} \sin x\, dx = 2 \text{ och } \int_0^{2\pi n} \sin x\, dx = 0 \text{ för n=0,1,2...}$$

Av resonemanget ovan är gränsvärdet

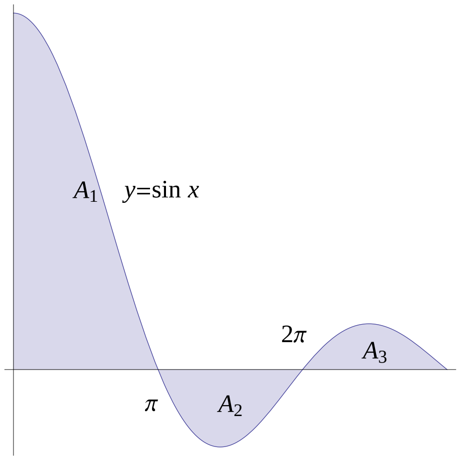
$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin x\, dx$$

av integralen inte entydigt, alltså är den generaliserade integralen divergent.

Ex 6 Är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x}$ konvergent?

Lösning

Vi kommer inte ge ett exakt svar på detta men med följande bild försöker vi illustrera vad som gäller.



Areorna A_j, $\quad j = 1, 2, \ldots$ "tar ut varandra".

För

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots$$

och man kan visa att denna summa är/konvergerar mot värdet $\dfrac{\pi}{2}$, som alltså är den gen. integralens värde. Dock är areorna A_j i storleksordningen $\displaystyle\int_{2j\pi}^{\pi+2j\pi} \frac{1}{x}\,dx$ och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ är ju divergent. Mer exakt så är

$$A_1 + A_3 + A_5 + \ldots = \infty$$

och

$$A_2 + A_4 + A_6 + \ldots = \infty.$$

Men när de adderas med tecken $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots$ tar positiva och negativa termer ut varandra, så mycket att *denna* summa (d.v.s. integralen) konvergerar.

Definition En integral, sådan att $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ är konvergent men $\displaystyle\int |f(x)|dx$ är divergent, kallas *betingat konvergent.*
Om integralen $\displaystyle\int |f(x)|dx$ är konvergent, säger man att $\displaystyle\int f(x)dx$ är absolutkonvergent.

Sats Om $\displaystyle\int |f(x)|dx$ konvergent, så är $\displaystyle\int f(x)dx$ konvergent, d.v.s.

$$\text{Absolutkonvergens} \implies \text{konvergens.}$$

Ex 7 Är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}dx$ konvergent?

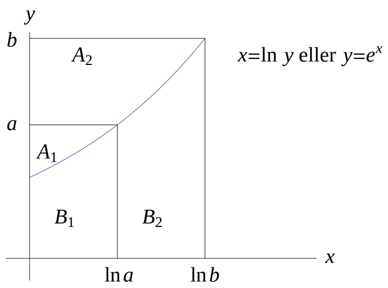
Lösning

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ är konvergent. Alltså är integralen absolutkonvergent och därmed konvergent.

Ex 8 Geometrisk härledning av $\displaystyle\int_a^b \ln x\, dx$.

Vi utgår ifrån att vi vet att $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$. M.h.a. figuren nedan beräknar vi den första integralen.



I figuren ovan är $A_2 = \displaystyle\int_a^b \ln y\, dy$ samt

$$A_2 + A_1 + B_1 + B_2 = b \ln b, \text{ och } A_1 + B_1 = a \ln a.$$

Dessutom är

$$B_2 = \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\, dx = b - a$$

d.v.s.

$$A_2 = b \ln b - a \ln a - (b - a) = [x \ln x - x]_a^b .$$