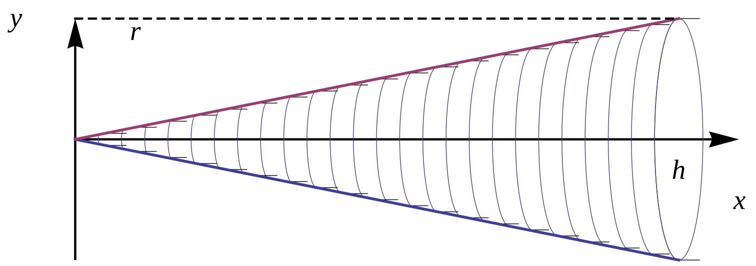
1 Föreläsning 7 Volym, area och längd

1.1 Volym av vissa kroppar, Skivmetoden

Ex 1 Vi skall beräkna volymen av en rak cirkulär kon med radie r och höjd h. Vi låter ytan som begränsas av $y = f(x) = kx$, $y = 0$ ($x-$axeln), samt $x = 0$ och $x = h$ rotera kring $x-$axeln. Detta genererar en rotationskropp.

Dess volym fås om man "skivar"kroppen i, säg n tunna skivor med tjocklek $\Delta x = \dfrac{h-0}{n}$ i punkterna $x = i\,\Delta x$ med med radie $y = k\,(i\,\Delta x)$ för $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Vidare är linjens riktningskoefficient $k = \dfrac{r}{h}$.



Vi får då en undersumma (och p.s.s. en översumma) och till slut låta $n \to \infty$, och därmed få volymen av konen. Istället skall vi resonera med *infinitesimala*, dV och dx, d.v.s. volymen dV av en oändligt liten cylinderskiva med oändligt liten tjocklek dx. Man hoppar därmed över steget med under- och översumma och får direkt en integral för volymen, här betecknad V. En sådan cylinderskiva har volymen $dV := \pi y^2 dx$. Konens volym är integralen ("summan" av alla dV)

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{h} dV = \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot x^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \\ &= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}\,. \end{aligned}$$

1.2 Volym, skalmetoden

Ex 2 Man kan dela in konen i koncentriska cylindriska skal parallella med $x-$axeln.

Ett sådan skal har den infinitesimala arean $dy\,(h-x)2\pi y$, där $y = kx = \dfrac{r}{h}\,x$. Vi skall alltså integrera m.a.p. y, där $0 \le y \le r$. Integralen blir

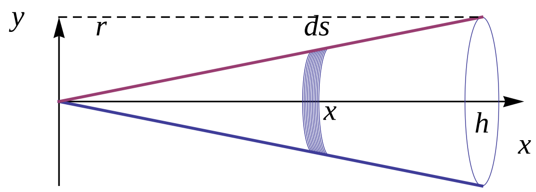
$$2\pi \int_0^r y\left(h - \frac{h}{r}y\right) dy = 2\pi \frac{h}{t} \int_0^r \left(ry - y^2\right) = \frac{1}{3}\pi h r^2\,,$$

d.v.s. samma resultat som i exemplet ovan.

1.3 Area av yta

Vi tar återigen konen som exempel.

Ex 3



Ett infinitesimalt ytelement är har den infinitesimala arean $2\pi y ds$, där $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Vi får att konens *mantelyta* är

$$A = \int_{x=0}^{h} 2\pi y ds = \int_{x=0}^{h} 2\pi y \sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r}{h}\int_0^h x dx = 2\pi \cdot \frac{r}{h}\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\cdot \frac{h^2}{2} = \pi r \cdot \sqrt{h^2+r^2}.$$

1.4 Kurva och kurvlängd

Ex 4 Beräkna längden av kurvan γ: $x \mapsto (x, \ln x)$, där $1 \le x \le e$.

Lösning

Kurvans längd är

$$\begin{aligned}
L &= |\gamma| = \int_{x=1}^{e} ds = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{1+(1/x)^2}dx = \\
&= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = t \\ x = \sqrt{t^2-1} \\ dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} \\ x=1, t=\sqrt{2} =: a x = e, t = \sqrt{e^2+1} =: b \end{array}\right\} = \int_a^b \frac{t^2}{t^2-1}dt = \\
&= \{\text{pol.div}\} = \int_a^b \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = \int_a^b \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = \{\text{PBU}\} = \\
&= \int_a^b \left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\right)dt = \left[t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_a^b = \\
&= (b-a)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \\
&= \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right) = \{\text{Visa:}\} \\
&= \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{e^2+1}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1 = 2.00...
\end{aligned}$$