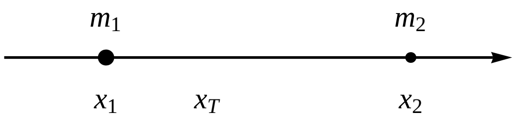
Föreläsning 8, tyngdpunkt, tröghetsmoment m.m.

Tyngdpunkt

Ex 1 Givet två punktmassor m_1 och m_2 utplacerade på en $x-$axel med koordinater x_1 respektive x_2. Bestäm tyndgpunktens $x-$koordinat x_T.

Lösning:



Tyngdpunktens koordinat uppfyller

$$(x_T - x_1)m_1 = (x_2 - x_T)m_2$$

elller ekvivalent

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = x_T \, ,$$

alltså ett viktat medelvärde av x_1 och x_2. Om man p.s.s. sätt har en massa m uppdelad i n delmassor Δm_i, d.v.s. $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, i koordinaterna x_i, $i = 1, 1, 2..., n$ blir tyngdpunktens koordinat

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \, \Delta m_i}{m} \, .$$

För en massa som är "kontinuerligt" utbreddd längts $x-$axeln är tyngdpunktens $x-$koordinat (Obs! Summasymbolen ersätts av ett integraltecken och Δm_i av dm etc.)

$$x_T = \frac{1}{m} \int x \, dm \, .$$

∎

Ex 2 Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten för konen med konstant densitet ρ given i exempel 29.

Lösning: Tyngdpunktens $y-$koordinat är 0, av symmetriskäl. Dess massa är $m = \rho V$, där volymen $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Vi skall se volymen som en funktion av x. $V(x) = \frac{\pi y^2 x}{3}$, där $V(h) = V$, d.v.s. volymen av (del-)konen där höjden är x och $0 \le x \le h$. Eftersom $y = \frac{r}{h} x$, så är

$$V(x) = \left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{\pi x^3}{3} \text{ och } m(x) = \rho \cdot V(x) \, .$$

Vi låter K representera kroppens, d.v.s. hela konens koordinater. Vi skall lösa integralen $\int_K x dm$. Vi byter variabel från m till x.

$$dm = \rho \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot x^2 dx \, .$$

Vi skall alltså lösa integralen

$$\int_K x dm = \int_0^h \rho\pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int x^3 dx = \rho\pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{h^4}{4} = \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4} .$$

Men detta är täljaren! Tyngdpunktens $x-$koordinat är

$$x_T = \frac{1}{m} \cdot \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4} = \frac{3}{\rho\pi r^2 h} \cdot \frac{\rho\pi r^2 h^2}{4} = \frac{3}{4} h .$$

Tyngdpukten är alltså $1/4$ från konens bas.

■

Ex 3 För en roterande kropp finns en rotationsaxel. Dess *vinkelhastighet* (eller vinkelfrekvens) ω definieras som vinkel per tidsenhet. Jorden roterar kring sin polaxel med ett varv, d.v.s. 2π på tiden $t = 24$ h. Alltså är

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = \frac{\pi}{12} \text{ rad/h} = \frac{\pi}{43200} \text{ rad/s} .$$

Vi kan formellt definiera

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1}$$

där t är tid och θ är vinkeln i radianer.
Göteborg ligger ungefär på breddgraden $\alpha = 57°$. Avståndet till polaxeln är då jordens radie $r = 6400$ km gånger sinus för vinkeln. Alltså $r \cos\alpha$. Hastigheten $v$på denna breddgrad på jordytan är då

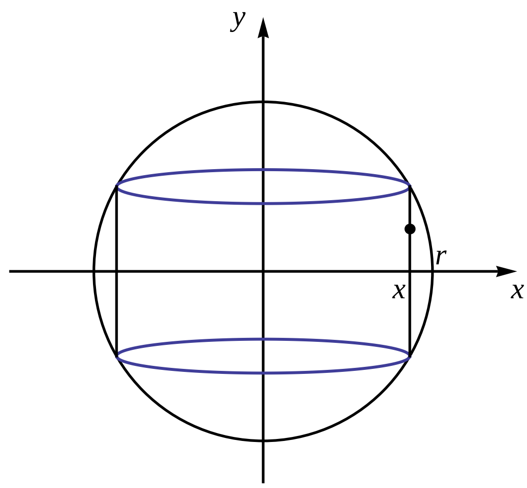
$$v = \omega\, r \cos\alpha = \frac{\pi}{12} \cdot 6.4 \cdot 10^3 \approx 913 \text{ km/h}.$$

■

Ex 4 Rörelseenergin för *translationsrörelse* är

$$W_{k,t} = \frac{mv^2}{2} \tag{2}$$

där m är kroppens massa och v dess hastighet. Vi skall beräkna rörelseenergin $W_k = W_{k,r}$ för ett homogent klot med radie r, som roterar kring en axel ($y-$axeln) genom dess medelpunkt. Vi antar att dess vinkelhastighet är ω. Sambandet mellan en punkts hastighet v och vinkelhastigheten är $v = \omega x$, där x är punktens (vinkelräta) avstånd till medelpunkten (rotationsaxeln).



Vi tänker oss $y-$axeln som rotationsaxel med (konstant) vinkelhastighet ω. Punkter på cylindern med avstånd x från rotationsaxeln ($y-$axeln) roterar med hastigheten $\omega\, x = v$. Rörelseenergin för cylinderskalet med radie x, tjocklek dx och höjd $y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ är då

$$dW_k = \frac{1}{2} dmv^2 = \frac{1}{2}\,\rho\, dV(\omega x)^2 = \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^2 x dx\,\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Den totala rörelseenergin är då

$$\begin{aligned} W_k &= \int_K dW_k = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{r} \rho \cdot 2\pi \cdot x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\omega^2 x^2 dx = \\ &= 2\pi\omega^2\rho \int_0^r x^3 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,. \end{aligned}$$

Vi beräknar integralen.

$$\int_0^r x^3\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^r \left(x\sqrt{r^2 - x^2}(x^2 - r^2) + r^2\, x\sqrt{r^2 - x^2}\right)\, dx =$$

$$= \int_0^r r^2 x\sqrt{r^2 - x^2} dx - \int_0^r r^2 x (r^2 - x^2)^{3/2} dx =$$

$$= \left[\frac{r^2}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{3/2} - \frac{r^2}{5}\left(r^2 - x^2\right)^{5/2}\right]_r^0 = \frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5} = \frac{2r^5}{15}\,.$$

Därmed är

$$W_{k,r} = 2\pi\omega^2\rho \cdot \frac{2r^5}{15} = \{V_{\text{klot}} = \frac{4\pi r^3}{3}\} = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{r^2}{5}\,\omega^2 = m \cdot \frac{r^2}{5}\,\omega^2\,.$$

Detta skriver man om så att det liknar rörelseenergi för translationsrörelse, givet i (**??**).

$$W_{k,r} = \frac{1}{2}\,\frac{2mr^2}{5}\,\omega^2 =: \frac{1}{2}\, I\,\omega^2\,.$$

Uttrycket $I := \dfrac{2mr^2}{5}$ kallas kroppens (klotets) *tröghetsmoment*[1] m.a.p. en axel ($y-$axeln) genom klotets medelpunkt.

▬

Ex 5 Hur mycket rörelseenergi $W_{k,r}$ har jorden? Antag att jorden har konstant densitet.

Lösning:

- Jordens massa $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg.
- Vinkelhastgiheten är $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}$/s.
- Radien är $r = 6.4 \cdot 10^6$ m.
- Tröghetsmomentet är $I = \dfrac{2mr^2}{5}$.
- Alltså är rörelseenergin

$$W_{k,r} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot m \cdot \omega^2 \approx 1.6 \cdot 10^{29}\ \text{Joule}\,.$$

▬

[1]Moment of intertia, I