Föreläsning 9, Lite om kurvor i planet

Parametrisering av en kurva

Ex 1 Vi beskriver en tågresa med konstant hastighet över Västgötaslätten) som (x, y) tågets positition (i något koordinatsystem) vid tiden t (h), som $(x, y) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$. Vid tiden $t = 0$ befinner sig tåget på stationen i GBG och vid tiden $t = 1.5$ (h) i Falköping. Tågets hastighet är (α, β) km/h, ex.vis $(\alpha, \beta) = (60, 80)$ (km/h). Dess *fart* är $|(\alpha, \beta)| = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ km/h. Kurvan (som här är en linje) är parametriserad med parametern t (som här är tid i h).

∎

Ex 2 Kurvan $y = x^2$ har x som parameter.
Kurvan $(x(t), y(t)) = (2t, t^2-1)$ kan ritas genom att sätta ut några punkter. Lättare är dock att *eliminera* parametern. Eftersom $t = x/2$ kan vi skriva $y = (x/2)^2-1 = \dfrac{x^2}{4} - 1$, alltså en parabel.
En cirkel kan inte beskrivas som *en* funktion y av variabeln x. Däremot kan den bekrivas m.h.a. en parameter. Ex.vis cirkeln med medelpunkt i $(1, -2)$ och radie 3 kan skrivas

$$(x, y) = (3\cos t + 1, 3\sin t - 2), \quad 0 \le t < 2\pi\,.$$

∎

Ex 3 Givet kurvan $(x, y) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad 0 \le t \le 2\pi$.

a) Bestäm tangentens ekvation där $t = \pi/3$.

b) Skissa kurvan.

c) Beräkna kurvans längd.

d) Beräkna den area som den inneständga ytan har.

Lösning:

a)

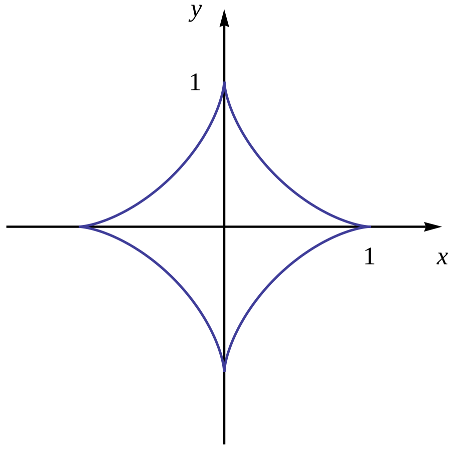
$$k(t) = \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\tan t \Rightarrow k(\pi/3) = -\sqrt{3}\,.$$

Linjen går genom punkten $(x_0, y_0) = (x(\pi/3), y(\pi/3)) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

Linjens ekvation är då

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}(2x-1)$$

b)



c) Kurvans längd är

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2} (9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t)^{1/2}dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6\,. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 y dx = 4\int_0^1 \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} d \\ &= \{x = \sin^3 t\} = 4\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{3/2} 3\sin^2 t\, \cos t\, dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} 3\cos^4 t \sin^2 t\, dt\,. \end{aligned}$$

Nu är denna integrals värde densamma om man byter roller på sin och cos, Alltså är

$$\begin{aligned} A &= 6\int_0^{\pi/2} (\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt = 6\int_0^{\pi/2} (\sin t\cos t)^2 dt = \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = \frac{3\pi}{8}\,. \end{aligned}$$

∎

Ex 4 Ex. vis för ellipsen med medelpunkt i $(x, y) = (0, 0)$ och halvaxlar $a > 0$ och $b > 0$ längs $x-$ respektive $y-$axeln, kan man parametrisera ellipsens ekvation genom

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Ellipsens längd L ges då av

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt\,.$$

Detta är en integral, som inte kan lösas med primitiv funktion uttryckt i elementära funktioner, utom i fallet $a = b$. I detta fall är kurvan en cirkel. Man kan alltså inte få ett enkelt uttryck för ellipsens längd. Integralen kallas *elliptisk* integral.

∎