1 Ett exempel på problem tilll lösning

1.1 Problem

Vilken form skall ett spegelteleskop ha?

1.2 En mer precis formulering

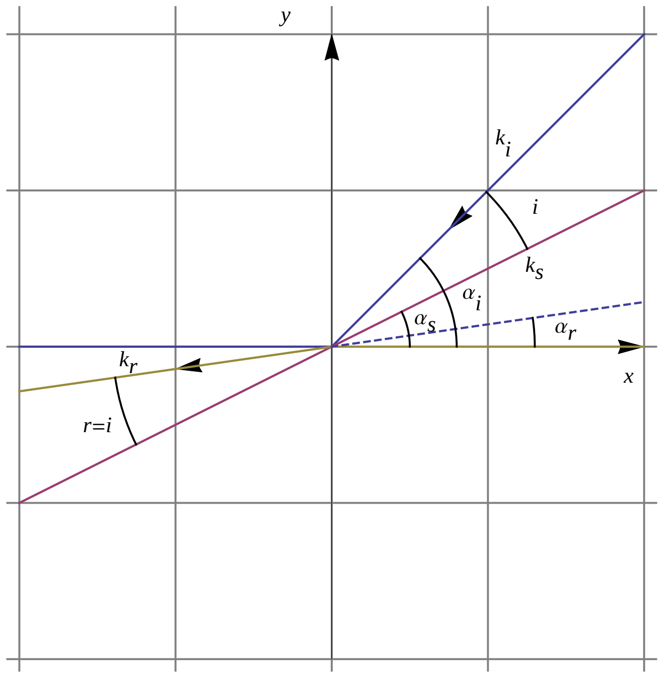
- Det gäller att samla så mcket ljus som möjligt, från en stjärna eller annat objekt på himlen. Man vill alltså koncentrera inkommande ljus i ett gemensamt fokus.
- **Vi söker en yta som koncentrerar parallellt inkommande strålar till ett gemensamt fokus, F.**

1.3 Några matematiska resultat

Vi söker ett samband mellan
infallandes stråles riktningskoefficient, spegelns riktningskoefficient och reflekterad stråles riktningskoefficient, k_i, k_s och k_r.
Vi ser att en riktningskoefficent för en linje k och motsvarande vinkel α mellan positiva $x-$axeln och linjen har sambandet

$$k = \tan\alpha. \tag{1}$$

1.4 Grafisk presentation



Ur figuren följer att

$$\begin{cases} \alpha_r + i = \alpha_s \\ \alpha_s + i = \alpha_i \end{cases} \Longrightarrow \alpha_r = 2\alpha_s - \alpha_i.$$

Identiteter för tan ger

$$k_r = \tan\alpha_r = \frac{\tan(2\alpha_s) - \tan\alpha_i}{1 + \tan 2\alpha_s\ \tan\alpha_i} = \frac{\frac{2k_s}{1-k_s^2} - k_i}{1 + \frac{2k_s}{1-k_s^2}\, k_i} = \frac{k_i\left(k_s^2 - 1\right) + 2k_s}{2k_i k_s - k_s^2 + 1}$$

1.5 Formulering som en DE

Den reflekerande ytan ses, i profil, som en kurva $y = y(x)$, genom origo med parallella infallande strålar med $y-$axeln. Det betyder att $k_i \longrightarrow \pm\infty$ och $k_s = y'$.
Genom att ta gränsvärdet $k_i \longrightarrow \pm\infty$. fås

$$k_r = \frac{y'^2 - 1}{2y'} \tag{2}$$

Ur figuren fås också

$$k_r = \frac{y - F}{x - 0}. \tag{3}$$

Likheterna (2) och (3) ger nu differentialekvationen

$$k_r = \frac{y'^2 - 1}{2y'} = \frac{y - F}{x}. \tag{4}$$

Denna DE är inte linjär och inte spearabel. Vi kan dock lösa ut y', då det är en andragradsekvation i y'.

$$y' = \frac{y - F}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y - F}{x}\right)^2 + 1}. \tag{5}$$

Vi sätter $\dfrac{y - F}{x} =: z$. Det följer att

$$y - F = x\,z \text{ ,som ger } y' = xz' + z.$$

DE:n (10) blir då

$$xz' + z = z \pm \sqrt{z^2 + 1}. \tag{6}$$

Vi löser först " $+$ "-fallet, som kan skrivas

$$xz' = \sqrt{z^2 + 1}. \tag{7}$$

Denna DE är separabel.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} \text{ eller ekvivalent } \ln x + C = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}). \tag{8}$$

Detta medför i sin tur, att

$$k\,x = z + \sqrt{z^2+1} \Longrightarrow (k\,x - z)^2 = z^2 + 1. \tag{9}$$

Genom att utveckla kvadraten i VL fås

$$z^2 - 2kxz + k^2x^2 = z^2 + 1 \Longleftrightarrow k^2x^2 - 2kxz = 1. \tag{10}$$

Nu är $xz = y - F$, så att

$$k^2x^2 - 2k(y - F) = 1. \tag{11}$$

Insättning av $y(0) = 0$ ger

$$k^2 \cdot 0^2 - 2k(0 - F) = 1 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2F}. \tag{12}$$

Insättning i VL i (11) ger

$$y = \frac{x^2}{4F} \tag{13}$$

Lösningen på problemet är alltså att ytan, d.v.s. kurvan är (13), som parabeln med fokaldistansen F. Ytan fås givetvis genom att rotera kurvan runt $y-$axeln.