1 Repetition 13

1.1 Taylorutveckling av funktion f, där $f^{(n+1)}(t)$ kontinuerlig på $[x_0, x]$

Utveckling i punkten $x_0(= a)$ av grad n

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{=p_n(x)} + R_n(x) \tag{1}$$

där *resttermen* är

$$R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{2}$$

Alltså kan Taylorutvecklingen kort skrivas

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x). \tag{3}$$

1.2 Taylorserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{4}$$

Genom att dels sätta $x_0 = 0$ och får vi en *Maclaurinserie.*

1.3 Exempel på Maclaurinserier

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \tag{5}$$

Att bestämma ett Maclaurinpolynom (eller Taylorpolynom)
av en viss grad av
ex.vis av en produkt $f(x)g(x)$,
tar man med tillräckligt med termer i respektive serie.

1.4 En medelvärdessats till

Sats 1.1 Antag f och g kontinuerliga i $[a, b]$ $(a < b)$ och g inte växlar tecken. Då finns ett $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

1.5 Maclaurinutveckling av $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^{2n}}{(2n)!} \cos t\,dt. \tag{7}$$

1.6 Lagranges restterm och Ordform (Maclaurinutv.)

Definition 1.1 Med $\mathcal{O}(x^k)$ menas $\mathcal{O}(x^k) = x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad för alla $x : \ |x| < d$ för något $d > 0$.

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \mathcal{O}(x^{n+1}) \tag{8}$$

1.7 Exempel på hur man räknar med $\mathcal{O}(x^k)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) &= \mathcal{O}(x^2) \\
\mathcal{O}(x^k) \cdot x^m &= \mathcal{O}(x^{k+m}) \\
\mathcal{O}(x^k) \cdot \mathcal{O}(x^m) &= \mathcal{O}(x^{k+m}) \\
\frac{\mathcal{O}(x^k)}{x^m} &= \mathcal{O}(x^{k-m}) \\
\frac{\mathcal{O}(x^k)}{\mathcal{O}(x^m)} & \quad \text{kan man inte skriva om med } \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{9}$$