1 Repetition 14

- **Två Maclaurinserier härledda ur den geometriska serien**

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \qquad |x|<1 \\ \arctan x &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x|<1 \end{aligned} \tag{1}$$

Följd: En följd är en lista

$$(a_, a_2, a_3, ...) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

av reella (komplexa) tal, där elementen numreras med $\{1, 2, 3, ...\}$ eller mer allmänt med $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\} \subset \mathbb{Z}$.

- Elementen a_n kan se som funktionsvärden av en funktion: $a_n = f(n)$.
- En följd är begränsad, om det finns ett $C \geq 0$, sådant att $|a_n| \leq C$ för alla $n = 1, 2, 3, ...$
- En följd är konvergent, om $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = A$ för ett reellt (komplext) tal A.

Serie: En serie är ett gränsvärde av partialsummor $\sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{3}$$

- Serien är begränsad, om $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C$ för alla $n = 1, 2, ...$

- Serien är konvergent, om $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ existerar.
- Antag att $a_k \geq 0$. Då kallas (3) *en positiv serie*.

- Om för två positiva serier gäller $0 \leq a_k \leq b_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent. Då är även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- Om $a_k = f(k) \geq 0$ för en funktion $f(x)$, som är avtagande på $[1, \infty)$, så gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_{1}^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent.}$$