Tentamen i matematik TMV 138, 20131218, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	Anders Martinsson 0703-088304
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2013, LP2

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+16}\,dx,$

   (b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx,$

   (c) $\displaystyle\int (2x+1)e^{-x/2}\,dx.$

   8p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $y'(x) = 2x\,(y(x)^2+1) \quad y(0)=0,$

   (b) $4y''(t) + y(t) = 2e^{t/2}\,,$

   (c) $t\,y'(t) - 2y(t) = 2t^3\,\cos t, \quad y(\pi) = 0\,.$

   8p

3. Givet funktionen $h(x) := \big(e^{2x}-1\big)\ln\big(x^2+1\big)$.

   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3, med $h(x) = p_3(x) + R_3(x)$, där $p_3(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 3 och med resttermen $R_3(x)$ på Ordoform.

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3}$.

   6p

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.

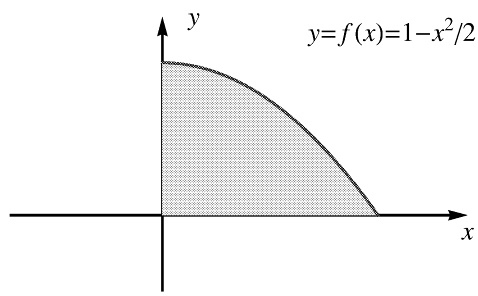
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+4k+3}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^{3/2}}$.

   5p

5. Givet funktionen $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$ och området i planet, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = \sqrt{2}$, se figur.

   (a) Beräkna volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring $y-$axeln.

   (b) Kurvan $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, där $0 \le x \le \sqrt{2}$, roterar kring $y-$axeln och genererar på så så sätt en yta. Beräkna ytans area.



Figur till uppgiften

   6p

6. (a) Ge en formel för partiell integration av produkten $f(x)\cdot g(x)$.

   (b) Ge lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ i (a). 5p

7. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}$. 5p

8. Givet serien $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,(2x)^{k-1}\,.$

   (a) För vilka x är serien absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

   (b) Ange seriens summa för de x, som serien är konvergent. Ledning: Börja med att ta fram en primitiv funktion genom att integrera termvis.

   7p

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$