

Tentamen i matematik TMV 138, 20140425, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	0703-088304, 0708-948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p. Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2013, LP2

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx,$

(b) $\int_0^{\infty} (x-2)e^{-x/2} \, dx,$ (c) $\int \tan^2 x \, dx.$

9p

2. Lös differentialekvationerna

(a) $xy'(x) + y(x)^2 = 0, y(1) = 2,$

(b) $y''(t) - 4y(t) = 8t^2,$

(c) $y'(t) + 2y(t) = 3e^{-2t}, y(1) = 0.$

9p

3. Givet funktionen $h(x) := \sin 2x \ln(4x^2 + 1).$

(a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3, med $h(x) = p_3(x) + R_3(x)$, där $p_3(x)$ är Maclaurinpolynom av grad 3 och med resttermen $R_3(x)$ på Ordoform.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3}.$

6p

4. (a) Beräkna summan av serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{k^2 + k - 2}.$

(b) Beräkna summan av serien $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (-2/3)^j.$

(c) Visa att $\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq 1 + \frac{\pi}{2}$ med lämplig integraluppskattning.

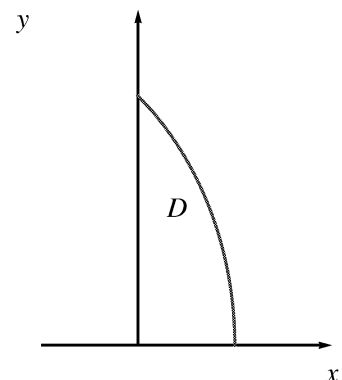
8p

5.

Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos t, t + \sin t), 0 \leq t \leq \pi/2.$

(a) Beräkna längden av kurvan.

(b) Kurvan, tillsammans med linjerna $y = 0$ och $x = 0$ begränsar ett område D i första kvadranten, se figur. Beräkna områdets area.



Figur till uppgiften 6p

6. (a) I integralen $\int f(x)dx$ görs variabelsubstitutionen $x = x(t)$. Hur ser integralen ut då den är en integral i variabeln t ? Skriv variabelsubstitutionen som en likhet.

(b) Ge lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ i (a).

5p

7. Beräkna integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$

7p

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$