Tentamen i matematik TMV 138, 20150114, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	0703-088304, 0708-948 456
Examinator:	Reimond Emanuelsson, 0708-948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2014, LP2

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx$,

   (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} (2x-1)e^{-2x}\, dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2+3x}\, dx$.

   9p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $x^2 y'(x) + y(x)^2 = 0,\ y(1) = -1$,

   (b) $y''(t) - 4y(t) = 4\, e^{2t}$,

   (c) $ty'(t) + y(t) = 4t \ln t, \quad y(1) = -1$.

   9p

3. Givet funktionen $h(x) := \ln\left(x^2+1\right) \cdot (\arctan x)^2$.

   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 6, med $h(x) = p_6(x) + R_6(x)$, där $p_6(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 6 och med resttermen $R_6(x)$ på Ordoform.

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - h(x)}{x^6}$.

   6p

4. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k$ är konvergent eller divergent.

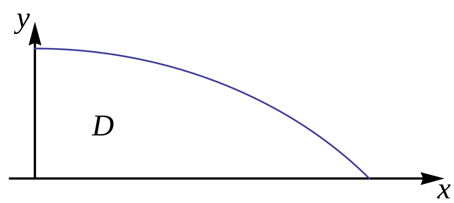
   (b) Visa att $1 \le \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2$ med lämplig integraluppskattning.

   (c) Beräkna summan av serien $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{j(j+3)}$. 8p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (t + \sin t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

   (a) Beräkna längden av kurvan.

   (b) Kurvan, tillsammans med linjerna $x = 0$ och $y = 0$ begränsar ett område D i första kvadranten, se figur. Beräkna områdets area.



Figur till uppgiften

   6p

6. (a) Ge en formel för variabelsubstitution av $\int f(x)dx$, där variabelsubstitutionen är $x = x(t)$. (Hur ser integralen ut då den är en integral i variabeln t? Skriv variabelsubstitionen som en likhet.)

   (b) Ge lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ i (a). 5p

7. Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx$.

   (a) På vilket/vilka sätt är integralen generaliserad?

   (b) Beräkna integralen.

   7p

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y} \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\, \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n} + (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$