

Tentamen i matematisk analys TMV138/TMV181, 20170410, 14.00-18.00

tel 031 772 5892/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson. Tentamensrond: Olof Giselsson ankn 5325

Inga Hjälpmedel

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_0^2 \frac{8}{x^2+4} dx$. (b) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x dx$.

(c) $\int xe^{-x/2} dx$.

3p, 3p, 3p

2. Lös differentialekvationerna

(a) $xy'(x) + y(x) = 1, y(2) = 1$. (b) $2y^2 - y' = 0, y(0) = 1$.

(c) $y''(t) + y'(t) = \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

3p, 3p, 3p

3. Funktionen $h(x) = \cos^2 x \arctan(x^2)$ är given.

(a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3 med resttermen på Ordoform. 4p

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - x^2}{x^4}$ 1p

4. (a) Beräkna $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{(k+1)(2k+4)}$. 2p

(b) Visa olikheten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \frac{\pi}{4}$. 4p

(c) Motivera att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent. 2p

5. Givet ytan som begränsas av $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, y = 0$, samt linjerna $x = 1$ och $x = e$.

(a) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring x -axeln. 3p

(b) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring y -axeln. 3p

6. Givet serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{2x}{3}\right)^n.$$

(a) Ange för vilka x som följande serie är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent. 5p

(b) Beräkna seriens summa för de x , som serien är betingat konvergent. 2p

7. Formulera och bevisa satsen om partiell integration av obestämd integral. 6p

Maximal poäng på tentamen är 50 p. Låt P vara erhållen poängsumma och B erhållen bonuspoäng.

Betyg U (underkänt), om $P + B < 20$.

Betyg 3, om $20 \leq P + B < 30$.

Betyg 4, om $30 \leq P + B < 40$.

Betyg 5, om $40 \leq P + B$.

Trigonometri

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $2 \sin x \cos x = \sin 2x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

•

$$e^x = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \cdot x^{2n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \cdot x^{2n+2} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$