Envariabelsanalys Z&TD, ht2017, Föreläsning 1.1

Introduktion:

* Föreläsningar, räkneövningar, matlab precis som förra mattekursen.

* Googla TMV138 för att hitta hemsidan
  Ska försöka hålla tidsplanen på hemsidan

* Övningar: Oskar Eklund (ML1), Barbara Schnitzer (ML2), Erik Jansson (ML3), Hossein Raufi (ML4)

* Matlab: Maria Bergqvist, Andrea Krogdal, Alexey Kuzmin, André Malm

  Läs igenom labben innan!!
  Jobba i grupper om 2!! (inte 1, inte 3)

  Ingen gruppindelning på övningar/matlab

* Duggor (planerade) 3x MapleTA, 2x Salsduggor
  Max 5 ~~poäng~~ bonuspoäng till tentan

* Kursbok: Adams, kapitel 5-7, 9, 18

* Kursen kan delas upp i 3 delar:
  (i) Integraler
  (ii) Differentialekvationer
  (iii) Serier

Idag:

* Summor och summa-notation
* Areaberäkningar och integraler

Summor: (5.1)

Definition: Om $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ och f funktion så skriver vi

$$\sum_{j=m}^{n} f(j) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n)$$

Ex. $\displaystyle\sum_{j=1}^{7} j^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + 7^3$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = x^0 + x^1 + \ldots + x^n = 1 + x + \ldots + x^n$$

Viktig egenskap: $\displaystyle\sum_{j=m}^{m+n} f(j) = \sum_{k=0}^{n} f(k+m)$

Ex. $\displaystyle\sum_{j=4}^{20} \sin(j+1) = \left\{ \begin{array}{l} k = j-4, \; j=4 \Leftrightarrow k=0 \\ j = k+4, \; j=20 \Leftrightarrow k=16 \end{array} \right\} =$

$$= \sum_{k=0}^{16} \sin(k+4+1) = \sum_{k=0}^{16} \sin(k+5)$$

Kända/Viktiga summor:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, om $x \neq 1$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bevis av (b) & (c): (b)

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$
$$+ \quad \sum_{j=1}^{n} j = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2\sum_{j=1}^{n} j = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ st}}$$

$$\therefore\ 2\sum_{j=1}^{n} j = n(n+1) \iff \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) Om $S = \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, så

$$xS - S = x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = x^{n+1} - 1$$

$$\iff xS - S = x^{n+1} - 1 \iff S(x-1) = x^{n+1} - 1$$

$$\therefore\ S = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{om } x \neq 1$$

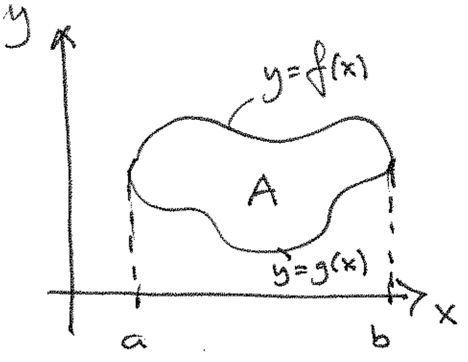
$\blacksquare$

Areaberäkningar och integraler: (5.2–5.3)

Att bestämma plana ytors area är en ultraklassisk del av matematiken (redan de gamla grekerna...)

Integraler är den moderna matematikens (analytisk geometri, funktioner etc.) angreppsätt för detta klassiska problem

Givet en begränsad funktion f definierad på $[a, b]$ betecknar $\int_a^b f(x)\,dx$ arean av området över x-axeln men under f:s graf. Af.



Detta "löser" det klassiska problemet då

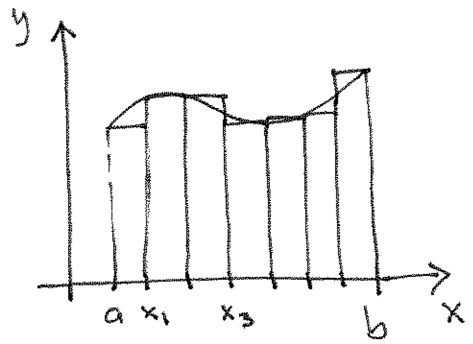
$$A = A_f - A_g$$

Integrationsteori är en högst icke-trivial teori som det tog mänskligheten ett antal millennier att utveckla.

Vi kommer att studera den s.k. Riemannintegralen

Idén bakom denna är relativt enkel:

Givet en "snäll" funktion f definierad på $[a,b]$,



beräknar vi arean under f:s graf genom att dela upp $[a,b]$ i n st. delintervall

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

och approximera med rektanglar.

Ju finare uppdelning av $[a,b]$, desto bättre approximation. Låter vi $n \to \infty$ får vi den exakta arean.

Formellt formuleras detta på följande sätt:

Definition: En indelning av $[a,b]$ i delintervall kallas för en partition av $[a,b]$ och skrivs

$$P: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Definition: Givet en funktion f definierad på $[a,b]$

och en partition P av $[a, b]$. Låt m_j och M_j beteckna min. och max. av f på $[x_{j-1}, x_j]$. Under- och översumman av (f, P) betecknas $L(f, P)$ resp. $U(f, P)$ och definieras av

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1})$$

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})$$

Definition: Låt f vara en funktion definierad på $[a, b]$. Om det existerar ett unikt tal $I \in \mathbb{R}$ s.a. det för varje partition P av $[a, b]$ gäller att

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

säger vi att f är (Riemann-) integrerbar på $[a, b]$. Talet I kallas för integralen av f på $[a, b]$ och skrivs

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Naturliga fråga: Vilka funktioner är integrerbara? (Dvs vad betyder "snäll" funktion?)

Det är här som integrationsteori blir riktigt svårt. M.h.a. fyra tekniska hjälpsatser och ett nytt kontinuitetsbegrepp lyckas Adams i Appendix IV bevisa:

Sats: Om f är kontinuerlig på $[a, b]$, så är f även integrerbar på $[a, b]$.

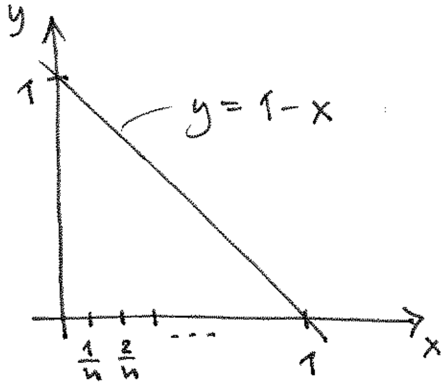
Bevis: Ingår ej!

Följdsats

Korollarium: Om f är styckvis kontinuerlig (dvs f är kontinuerlig utom i ett ändligt antal punkter) och begränsad på $[a,b]$, så är f integrerbar på $[a,b]$.

Bara för att vi vet att en funktion är integrerbar betyder detta inte att det är enkelt att beräkna integralen m.h.a. summor.

Ex. Låt $f(x) = 1-x$ och beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$ genom att visa att $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$ där P_n är $[0,1]$ indelad i n st. delintervall av längd $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$.



Lösn.: Ser att det för varje delintervall

$$[x_{j-1}, x_j] = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \quad j = 1, \ldots, n$$

gäller att:

$$m_j = \min_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = f\left(\frac{j}{n}\right) = 1 - \frac{j}{n}$$

$$M_j = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = f\left(\frac{j-1}{n}\right) = 1 - \frac{j-1}{n}$$

$$\Rightarrow L(f,P_n) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{n}\left(n - \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{2n-n-1}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2\cancel{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(n - \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{2n - n - 1 + 2}{2} \right) = \frac{n+1}{2n} = \frac{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})}{2\cancel{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$$

Utifrån vad vi vet är föregående exempel onödigt krångligt, det räcker att bara beräkna arean av triangeln. Men exemplet visar att integralen av även en så enkel funktion som $f(x) = 1 - x$ är svår att beräkna m.h.a. summor. För att komma någonstans behöver vi hitta ett enklare sätt, vilket vi kommer att studera under nästa föreläsning (Spoiler: integraler = primitiva funktion, dvs anti-derivator)

<u>Läxa</u>: Läs igenom Theorem 3 i avsnitt 5.4 till nästa föreläsning.