Envariabelsanalys Z & TD, ht 2017, Föreläsning 1.3

Repetition:

- Sats: (Integralkalkylens medelvärdessats) Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så $\exists \xi \in [a,b]$ s.a.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

- Sats: (Analysens fundamentalsats) Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ så

$$S'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

- Definition: En deriverbar funktion F sägs vara en primitiv funktion till en funktion f på ett intervall I, om

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Vi skriver $F(x) = \int f(x)\,dx$

- Korollarium: (Insättningsformeln) Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och F ä en primitiv funktion till f så

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Idag:

* Variabelsubstitution

* Area av plana områden

Variabelsubstitution: (5.6)

Att beräkna primitiva funktioner är förvisso betydligt enklare än att beräkna summor av rektanglar. Men det är trots detta avsevärt svårare att integrera än att derivera. Två extremt viktiga verktyg för beräkning av primitiva funktioner är:

(i) Variabelsubstitution

(ii) Partiell integration ← nästa föreläsning

<u>Sats</u>: (Variabelsubstitution) Om $x = g(t)$ där g är injektiv och deriverbar så

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \,\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \quad \text{där} \quad \begin{array}{l} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{array}$$

<u>Bevis</u>: Antag att F är en primitiv till f, dvs $F' = f$. Då gäller att:

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\cdot g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(g(t))\,dt = \left[F(g(t))\right]_\alpha^\beta =$$

$$= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Variabelsubstitution handlar uteslutande om "learning by doing"

<u>Ex.</u> Beräkna $\displaystyle\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Lösn.: Det som stör oss är $\sqrt{x+1}$. Vi försöker därför bli av med den genom substitutionen $t=\sqrt{x+1}$.

$$\int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{x+1}\ ,\ x=0 \Leftrightarrow t=1\ ,\ x=8 \Leftrightarrow t=3 \\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 2\,dt = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_1^3 \cos(t)\,2\,dt = 2\Big[\sin(t)\Big]_1^3 = 2\big(\sin(3)-\sin(1)\big)$$

Ex. Beräkna $\displaystyle\int_0^\pi \left(2+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Lösn.: Här finns det inget tydligt som stör. Istället noterar vi att derivatan av $2+\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ typ är $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (dvs upp till en konstant).

$$\int_0^\pi \left(2+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} t=2+\sin\left(\frac{x}{2}\right) & ,\ x=0 \Leftrightarrow t=2 \\ dt=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx & ,\ x=\pi \Leftrightarrow t=3 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_2^3 t^2\cdot 2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}$$

Obs! Variabelbytet måste vara injektivt!

Ex. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ men

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} t=x^2, & x=-1 \Leftrightarrow t=1 \\ & x=1 \Leftrightarrow t=1 \end{array} \right\} = \int_1^1 \dots\,dt = 0 \ \lightning$$

Ex. Beräkna $\int \sqrt{3x+4}\,dx$ ← funktion av x

Lösn.: $\int \sqrt{3x+4}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3x+4 \\ dt = 3dx \end{array} \right\} = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{3}\,dt =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{9}t^{3/2} = \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

↖ funktion av t

Ex. Beräkna $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Lösn.: $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = I_1 + I_2$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + C$$

Integraler av formen $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$ bör lösas med substitutioner om någon av eller båda $m, n \in \mathbb{N}$ är udda.

Ex. Beräkna $\int \sin^4(t)\cos^5(t)\,dt$

Lösn.: 5 udda så vi skriver:

$$\cos^5(t) = \cos^4(t)\cos(t) = (\cos^2(t))^2\cos(t) =$$
$$= (1-\sin^2(t))^2\cos(t)$$

$$\Rightarrow \int \sin^4(t)\cos^5(t)\,dt = \int \sin^4(t)(1-\sin^2(t))^2\cos(t)\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(t) \\ du = \cos(t)\,dt \end{array} \right\} = \int u^4(1-u^2)^2\,du =$$

$$= \int u^4(1-2u^2+u^4)\,du = \int (u^4-2u^6+u^8)\,du =$$

$$= \frac{u^5}{5} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5(t) - \frac{2}{7}\sin^7(t) + \frac{1}{9}\sin^9(t) + C$$

Om däremot både m och n ä jämna blir det knepigare. Oftast ~~måste~~ man då använda

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \quad \text{eller} \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

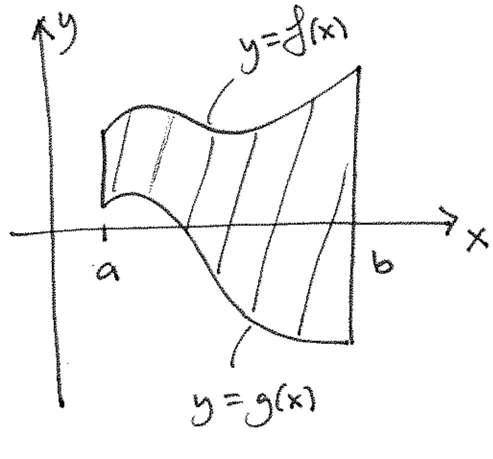
Area av plana områden: (5.7)

Vi vet att $\int_a^b f(x)\,dx$ ä "arean under" f:s graf

(" " då den kan vara negativ).

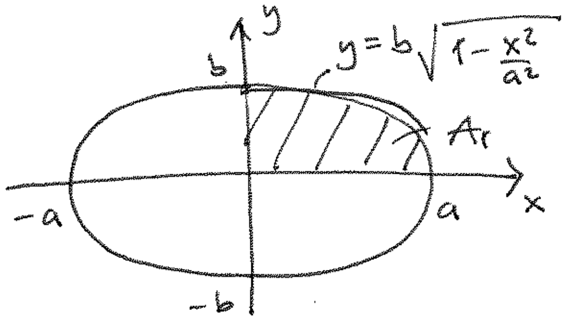
Arean mellan två grafer $y=f(x)$ och $y=g(x)$ där $f \geq g$ ges av:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



Ex. Beräkna arean av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\quad a,b>0$$



Lösn.: Vi ser att:

$$\text{Area}=4\cdot A_1=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=4b\int_0^a\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2}\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} x=a\sin(t),\ |t|\le\frac{\pi}{2} & ,\ x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ dx=a\cos(t)\,dt & ,\ x=a \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\;a\cos(t)\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=$$

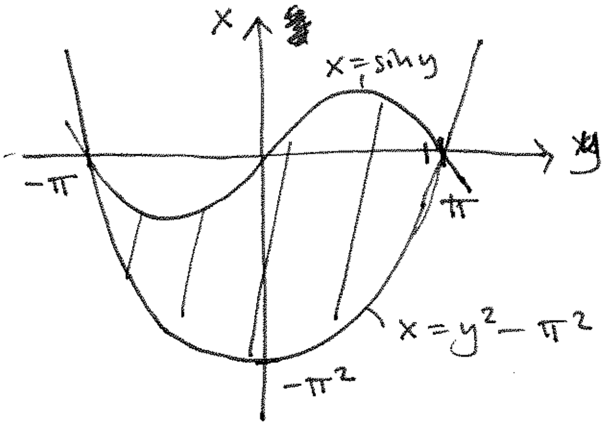
$$=4ab\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cos t\,dt=\left\{0\le t\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos t\ge 0\right\}=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\cancel{4}^{\,2}ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{\cancel{2}}\,dt=$$

$$=2ab\left[t+\cancel{\frac{\sin(2t)}{2}}\right]_0^{\pi/2}=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab \text{ a.e.}$$

Ex. Beräkna arean av det ändliga område som innesluts av kurvorna $x=y^2-\pi^2$, $x=\sin(y)$

Lösn.: "Byt plats på" x- och y-axeln



$$\text{Area}(A)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(y)-(y^2-\pi^2)\right)dy=$$

$$=\left[\underbrace{-\cancel{\cos(y)}}_{=0}+\pi^2 y-\frac{y^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\pi^3-\frac{\pi^3}{3}-\left(-\pi^3+\frac{\pi^3}{3}\right)=$$

$$=2\pi^3-\frac{2}{3}\pi^3=\frac{4\pi^3}{3} \text{ a.e.}$$