Envariabelsanalys Z&TD. ht2017, Föreläsning 2.1

Repetition:

- **Sats:** (Variabelsubstitution) Om $x = g(t)$ där g injektiv och deriverbar, så

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \quad \text{där} \quad \begin{matrix} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{matrix}$$

- $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$ beräknas m.h.a.

(i) Variabelsubst. om någon av eller båda $m, n \in \mathbb{N}$ udda

(ii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ eller $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

om både $m, n \in \mathbb{N}$ jämna.

Idag:

* Partiell integration
* Partialbråksuppdelning

Partiell integration: (6.1)

Sats: (Partiell integration) Om F är en primitiv funktion till f och g är deriverbar så gäller att:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Bevis: Om F primitiv till f, så $F' = f$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(F(x)g(x)) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Integrera båda sidor:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Precis som variabelbyten är partiell integration ett enkelt men extremt användbart verktyg.

Ex. Beräkna $\int x e^x\,dx$

Lösn.: Tänk $g(x) = x$, $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int x e^x\,dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x e^x - e^x + C$$

Ett vanligt trick är att låta $f(x) = 1$

Ex. Beräkna $\int \ln(x)\,dx$

Lösn.: Tänk $g(x) = \ln(x)$, $f(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Ex. Beräkna $\int x \arctan(x)\,dx$

Lösn.: $\int x \arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= x - \arctan(x)$$

$$\therefore \int x\arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

Ett annat vanligt trick är att partialintegrera två gånger och få tillbaka det man började med.

<u>Ex.</u> Beräkna $\int e^x \cos(x)\,dx$

<u>Lösn.</u>: $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + \int e^x(+\sin(x))\,dx =$

$$= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^x\cos(x)\,dx = e^x(\cos(x)+\sin(x)) - \int e^x\cos(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int e^x\cos(x)\,dx = e^x(\cos(x)+\sin(x))$$

$$\therefore \int e^x\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x)) + C$$

<u>Partialbråksuppdelning</u>: (6.2)

<u>Definition</u>: En <u>rationell</u> funktion är en kvot av polynom, dvs en funktion av formen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom.

Rationella funktioner kan man alltid integrera med följande metod:

<u>Steg 1</u>: Om grad $P \geq$ grad Q, polynomdividera.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \text{grad } R < \text{grad } Q$$

$K(x)$ är ett polynom som är enkelt att integrera

$\frac{R(x)}{Q(x)}$ kan fortfarande vara svår att integrera

<u>Steg 2</u>: Faktorisera $Q(x)$

<u>Steg 3</u>: Skriv $\frac{R(x)}{Q(x)}$ som en summa av enklare rationella funktioner m.h.a. partialbråksuppdelning

<u>Steg 4</u>: Integrera termerna.

Antag att vi har den rationella funktionen

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)}$$

Partialbråksuppdelning handlar om att hitta $A, B \in \mathbb{R}$ s.a.

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Detta går alltid eftersom vi kan skriva om HL med MGN:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

Detta ger i sin tur ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B=1 \iff A=1-B \Rightarrow A=5/4 \\ 2A-2B=3 \Rightarrow 2-2B-2B=3 \iff 4B=-1 \iff B=-1/4 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2} \quad (*)$$

Alternativ metod:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \iff x+3 = A(x+2) + B(x-2)$$

<u>$x=2$</u>: $5 = 4A \iff A = 5/4$

$\underline{x=-2}$: $1 = -4B \iff B = -1/4$

En variant av denna metod kallas för <u>handpåläggning</u>.

<u>Ex.</u> Beräkna $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-4}\,dx$

<u>Lösn.</u>: $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4+x+3}{x^2-4}\,dx \overset{\text{Steg 1}}{=} \int \left(1+\frac{x+3}{x^2-4}\right)dx =$

$= x + \int \frac{x+3}{x^2-4}\,dx \overset{\text{Steg 2}}{=} x + \int \frac{x+3}{(x-2)(x+2)}\,dx \overset{\text{Steg 3}}{=} \{(*)\} =$

$= x + \int \left(\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx = x + \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$

Då man faktoriserar ett reellt polynom, $Q(x)$, kan 4 fall inträffa:

(i) Q har olika reella rötter av multiplicitet 1 (dvs varje rot förekommer endast en gång)

$\therefore\ Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

För varje faktor $x-a_j$ ansätter man en term av formen $\frac{A_j}{x-a_j}$ precis som tidigare.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

(ii) Q har endast reella rötter men en eller flera rötter har multiplicitet ≥ 2 (dvs det finns en dubbelrot eller en trippelrot, etc.)

$\therefore\ Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_n)^{k_n}$. $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 1$

$k_1 + \ldots + k_n > n$

För varje faktor $(x-a)^k$ gör man i det här fallet ansatsen:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Ex. Partialbråksuppdela $\dfrac{4}{x^3+6x^2+9x}$

Lösn.: $x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) = x(x+3)^2$

$$\Rightarrow \frac{4}{x^3+6x^2+9x} = \frac{4}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx$$

$x=-3$: $4=-3C \Leftrightarrow C=-4/3$

$x=0$: $4 = 9A \Leftrightarrow A = 4/9$

$$\Rightarrow 4 = \frac{4}{9}(x^2+6x+9)+Bx^2+3Bx-\frac{4}{3}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \left(\frac{4}{9}+B\right)x^2+\left(\frac{8}{3}+3B-\frac{4}{3}\right)x+4$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}+B=0 \Leftrightarrow B=-\frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{4}{x(x+3)^2} = \frac{4}{9x}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x+3)^2}$$

(iii) & (iv) kommer nästa föreläsning