Envariabelsanalys Z & TD. ht2017, Föreläsning 2.2

Repetition:

- Sats: (Partiell integration) Om F primitiv till f, och g deriverbar, så

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

alternativt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

- Definition: En rationell funktion är en kvot av polynom.

- För att integrera $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ där $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ används partialbråksuppdelning. 4 olika fall:

(i) $Q(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ olika

För varje $(x-a_j)$ ansätt $\dfrac{A_j}{x-a_j}$, $A_j \in \mathbb{R}$

$$\therefore\ \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

(ii) $Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_n)^{k_n}$, $k_1,\ldots,k_n \geq 1$, $k_1+\ldots+k_n > n$

För varje $(x-a)^k$ ansätt

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad A_1,\ldots,A_k \in \mathbb{R}$$

Idag:

* Partialbråksuppdelning (forts.)

* Rotuttryck

Partialbråksuppdelning: (6.2)

Vi fortsätter med fallen (iii) & (iv)

(iii) Q har faktorer av formen x^2+bx+c som saknar reella rötter.

För varje sådan faktor, ansätt en term av formen

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Ex. Beräkna $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Lösn.: Vet att $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=0 \implies x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}$ saknar reella rötter!

$$\implies \frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} \iff$$

$$\iff 1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$\underline{x=-1}$: $1=A(1+1+1) \iff A=1/3$

$$\implies Bx^2+(B+C)x+C = 1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \implies \begin{cases} B=-1/3 \\ C=2/3 \end{cases}$$

$$\implies \int\frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=x-\frac{1}{2} \\ dt=dx \end{array}\right\} =$$

$$= \int\frac{t+\frac{1}{2}-2}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int\frac{t}{t^2+3/4}\,dt - \frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+3/4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\frac{4t^2}{3}}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - 2\int\frac{dt}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) = \left\{ t = x - \frac{1}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\therefore \int\frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(iv) Q har faktorer av formen $(x^2+bx+c)^k$ där x^2+bx+c saknar reella rötter och $k>1$.

För varje sådan faktor, ansätt termer av formen

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

(iv) brukar leda till mycket omfattande beräkningar. Koncentrera er på (i) – (iii).

Integraler av rotuttryck: (6.3)

Avsnitt 6.3 handlar om olika variabelsubst. för integraler med rotuttryck

Fyra kategorier:

I. Funktioner innehållande $\sqrt{x+\alpha}$:

Enkelt. Gör subst. $t = \sqrt{x+\alpha}$

II. Funktioner innehållande $\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$:

Också enkelt. Gör subst. $t=\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$

Ex. Beräkna $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

Lösn.: Låt $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow t^2=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow t^2(x-1)=x+1$

$\Leftrightarrow t^2x-t^2=x+1 \Leftrightarrow x(t^2-1)=t^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{t^2+1}{t^2-1} \Rightarrow dx=\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\overset{dt}{=}-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt$

$$\therefore \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx=\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot t\cdot\left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt=$$

$$=\int \frac{-4t}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}\,dt=\ldots$$

Obs! Ser att enkel subst. inte nödvändigtvis betyder enkel integral.

III. Funktioner innehållande $\sqrt{\alpha-x^2}$:

Gör subst. $x=\sqrt{\alpha}\sin(t)$, $|t|\leq\frac{\pi}{2}$, så att

$$\sqrt{\alpha-x^2}=\sqrt{\alpha-\alpha\sin^2(t)}=\sqrt{\alpha\cos^2(t)}=\sqrt{\alpha}\,|\cos(t)|=$$

$$=\left\{-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right\}=\sqrt{\alpha}\cos(t)$$

Ibland måste man först kvadratkomplettera för att göra om $\sqrt{-x^2+ax+b}$ till $\sqrt{\alpha-x^2}$

Ex. Beräkna $\int\sqrt{-x^2+2x+3}\,dx$

Lösn.: $-x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3) = -\left((x-1)^2-4\right) = 4-(x-1)^2$

$$\Rightarrow \int \sqrt{-x^2+2x+3}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sqrt{4-t^2}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} t = 2\sin(s),\ |s| \leq \frac{\pi}{2} \\ dt = 2\cos(s)\,ds \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2(s)}\,2\cos(s)\,ds = \int \sqrt{4\cos^2(s)}\,2\cos(s)\,ds =$$

$$= 4\int \cos^2(s)\,ds = \left\{ \cos(2s) = \cos^2(s)-\sin^2(s) = 2\cos^2(s)-1 \right\} =$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}} \int \frac{1+\cos(2s)}{\cancel{2}}\,ds = 2\left(s + \frac{\sin(2s)}{2}\right) = 2s + \sin(2s) =$$

$$= 2s + 2\sin(s)\cos(s) = 2s + 2\sin(s)\sqrt{1-\sin^2(s)} =$$

$$= \left\{ \sin(s) = \frac{t}{2} \right\} = 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cdot\frac{t}{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} = \left\{ t = x-1 \right\} =$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + (x-1)\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4}} + C$$

IV. Funktioner innehållande $\sqrt{x^2+\alpha}$:

För integraler innehållande $\sqrt{x^2+\alpha}$ används oftast olika omskrivningar/specialtrick

Ex. Beräkna $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Lösn.: Låt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Leftrightarrow x^2 = t^2-1$
$\Rightarrow x\,dx = t\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,x\,dx = \int \frac{t^2-1}{\cancel{t}}\cdot\cancel{t}\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - (x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1} + C$$

I allmänhet är integraler innehållande $\sqrt{x^2+\alpha}$ svåra!

<u>Ex.</u> Beräkna $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

<u>Lösn.:</u> $$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \tan(t),\ |t| < \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}}} \cdot \frac{dt}{\cos^2(t)} = \int \frac{1}{\cos(t)}\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\,dt =$$

$$= \int \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(t) \\ du = \cos(t)\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1-u^2}\,du =$$

$$= \int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,du$$

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \iff 1 = A(1+u) + B(1-u)$$

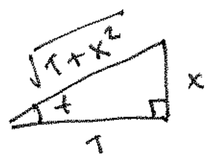
<u>$u=1$:</u> $1 = 2A \iff A = 1/2$

<u>$u=-1$:</u> $1 = 2B \iff B = 1/2$

$$\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,du = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+u} \right) du = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin(t))^2}{(\cos(t))^2}\right| =$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right) = \{ t = \arctan(x) \} =$$

$= \{$ 

$\} = \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + C$